

Homothétie

Soit O un point du plan et k un nombre positif. Appliquer à une figure l'**homothétie** de centre O et rapport k , consiste à multiplier par k toutes les distances par rapport au point O .

La forme de la figure est conservée mais on obtient une figure **agrandie** si $k > 1$ et **réduite** si $0 < k < 1$.

Nous allons appliquer l'homothétie de centre O et de rapport 2 à la fleur aux pétales jaunes.

Homothétie de rapport positif

Nous allons cette fois appliquer l'homothétie de centre O et de rapport 0,5 à la fleur aux pétales jaunes.

Homothétie de rapport positif

La distance au point O est aussi multipliée par 0,5 !

Homothétie de rapport positif

Si k est un nombre négatif, la figure obtenue par l'homothétie de centre O et rapport k est "retournée"

Nous allons appliquer l'homothétie de centre O et de rapport -2 à l'oiseau bleu.

Homothétie de rapport négatif

L'oiseau jaune est l'image de l'oiseau bleu par l'homothétie de centre O et de rapport -2. L'oiseau jaune est **retourné**.

Homothétie de rapport négatif

On reconnaît la configuration "en papillon" du théorème de Thalès.

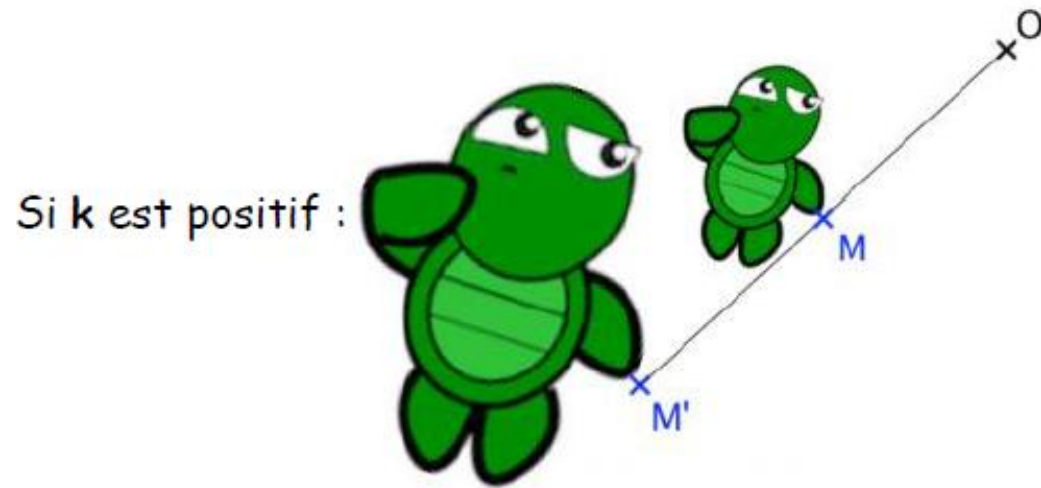
Homothétie de rapport négatif

$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = 2$
Les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.

IV. Homothétie

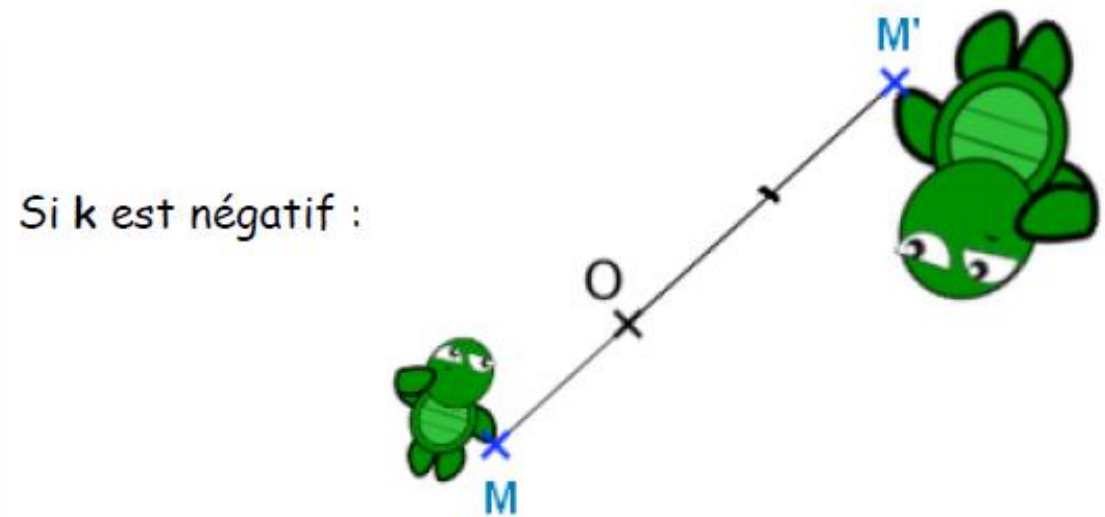
Une **homothétie** est une transformation qui permet d'agrandir ou réduire des figures géométriques.

Il faut un**centre**..... et un rapport d'.....**agrandissement**..... ou de**réduction**..... généralement appelé **k**.



M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport**2**..... signifie que :

- O , M et M' sont**alignés**.....
- M et M' sont du même**côté**..... par rapport à O .
- $OM' = \dots\dots\dots$ **2** $\dots\dots\dots \times OM$



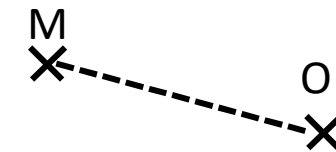
M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport**-2**..... signifie que :

- O , M et M' sont**alignés**.....
- M et M' ne sont pas du même**côté**..... par rapport à O .
- $OM' = \dots\dots\dots$ **2** $\dots\dots\dots \times OM$

Comment tracer une homothétie d'une figure ?

Méthode

Traçons l'image d'un point M par l'homothétie de centre O et de rapport k .

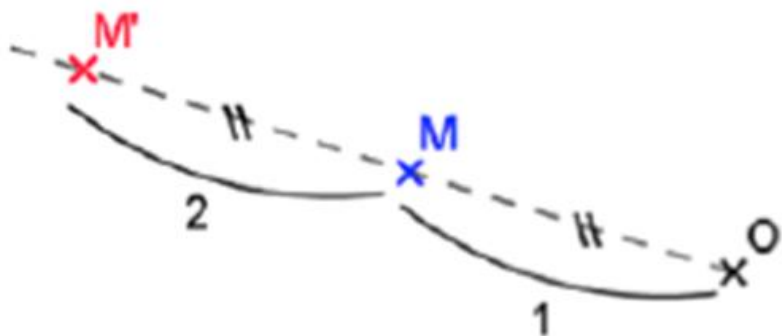


Si k est positif

On trace la demi-droite $[OM)$ et on reporte k fois la longueur.

Exemple :

$$k = 2$$

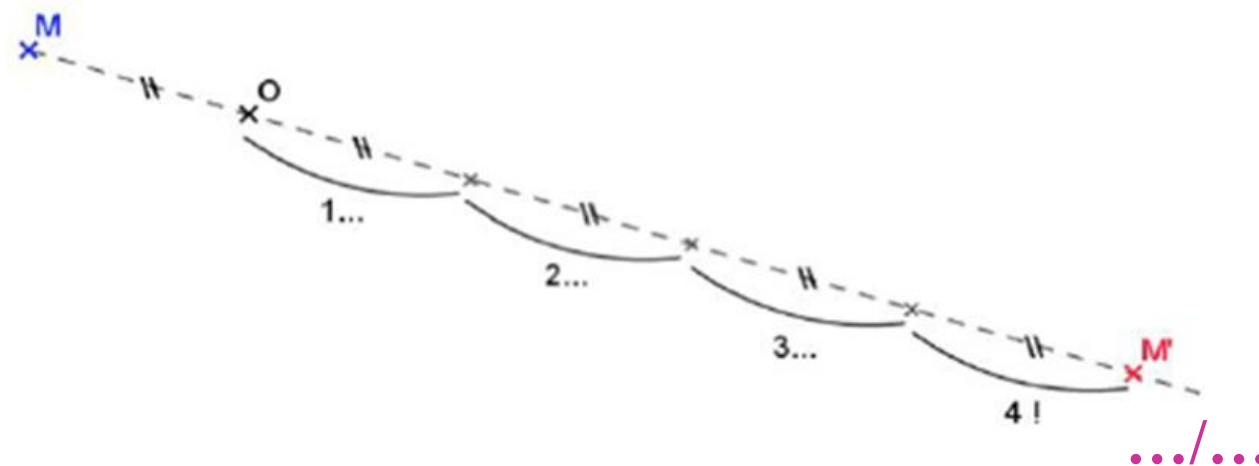


Si k est négatif

On trace la demi-droite $[MO)$ et on reporte k fois la longueur à partir de O .

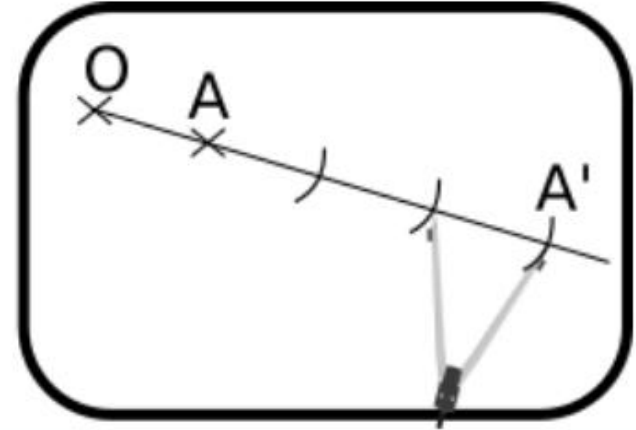
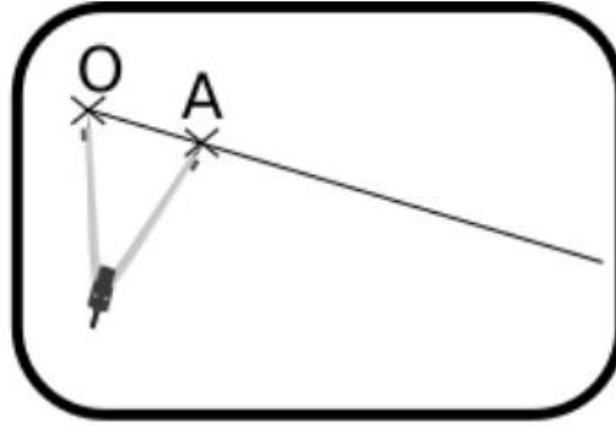
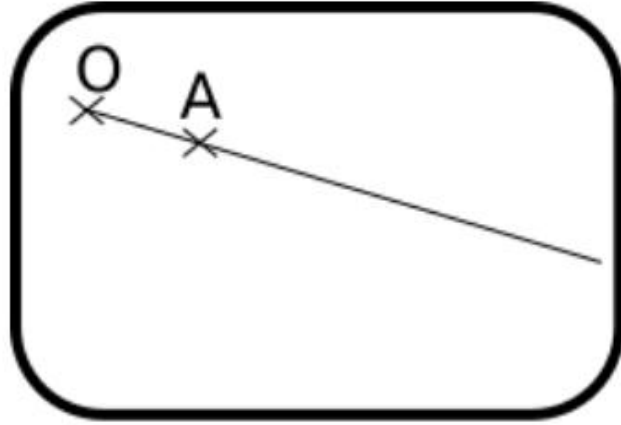
Exemple :

$$k = -4$$



Construire l'image d'un point par une homothétie :

On veut construire l'image du point A par l'homothétie de centre O et de rapport 4.



- 1) On commence par tracer la demi-droite [OA).
 2) On mesure la longueur OA avec le compas.
 3) On reporte cette longueur 4 fois à partir du point O, on obtient le point A'.

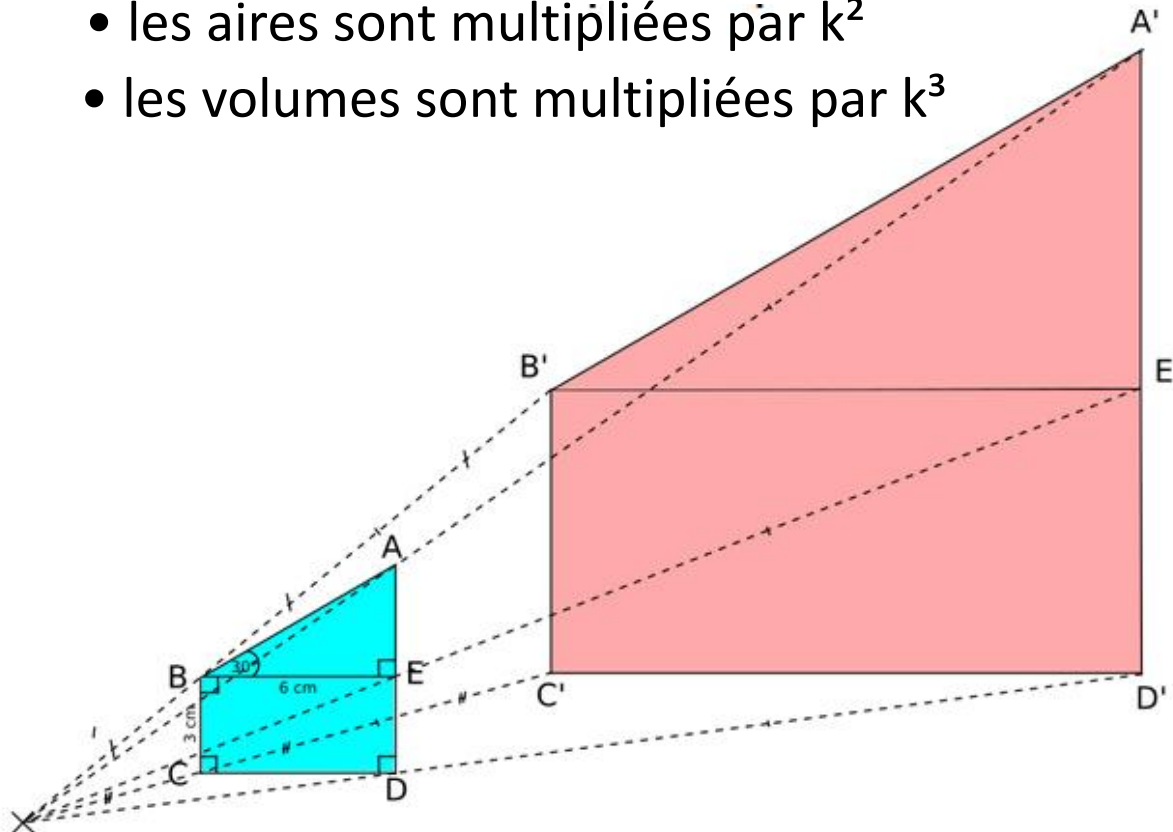
Remarque : On a : $OA' = 4 \times OA$.

Propriétés :

Soit $k > 0$. Effectuer une homothétie de rapport k revient à faire un **agrandissement** (si $k > 1$) ou une **réduction** (si $0 < k < 1$) de coefficient k .

Lors d'une homothétie de rapport k : (*Même propriété que les agrandissements et réductions*)

- les mesures d'angles sont conservées.
- les longueurs initiales sont multipliées par k
- les aires sont multipliées par k^2
- les volumes sont multipliés par k^3



La figure rose est l'image de la figure bleue par l'homothétie de centre O et de rapport 3.

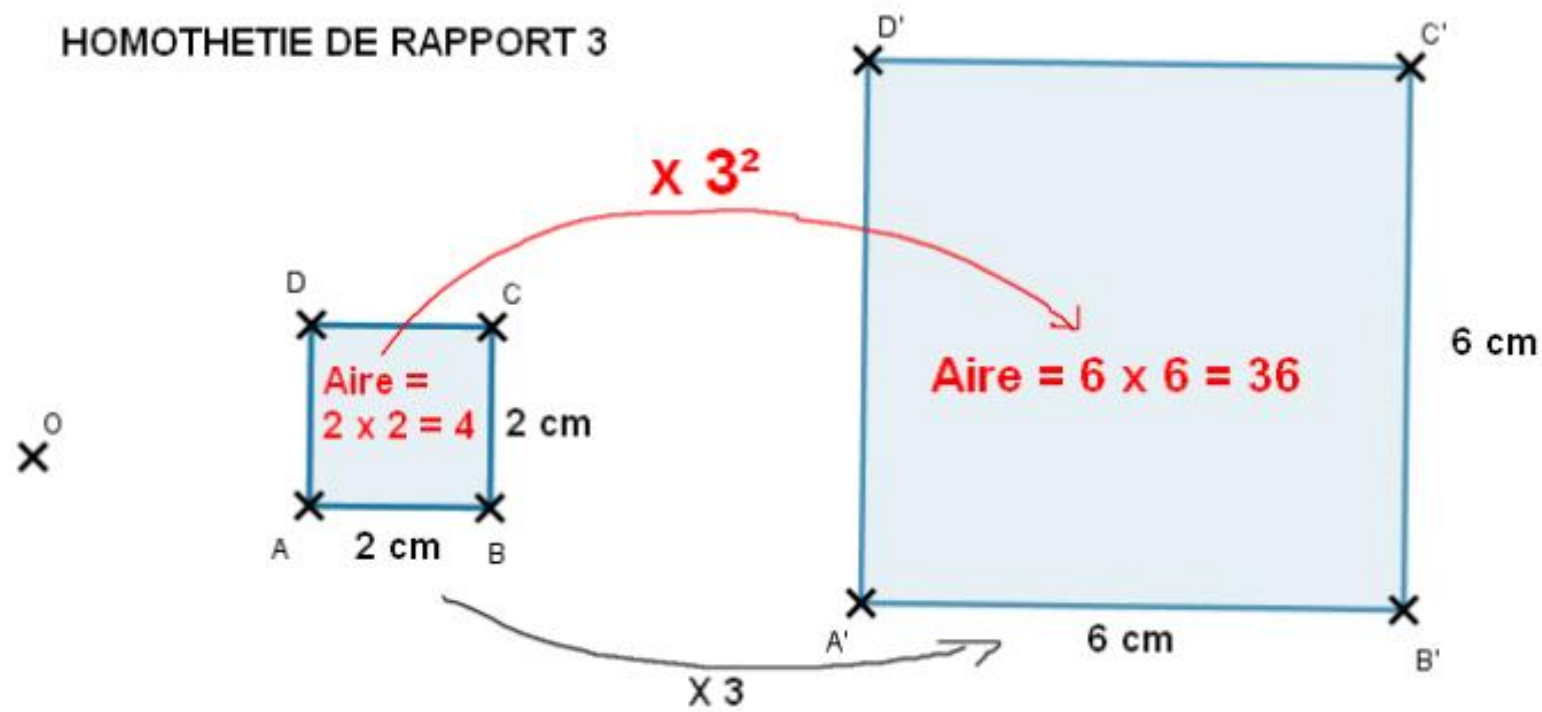
- La forme de la figure bleue est conservée.
- Les mesures d'angles de la figure rose sont les mêmes que ceux de la figure bleue : $\widehat{A'B'E'} = \widehat{ABE} = 30^\circ$
- Les longueurs de la figure rose sont égales à celles de la figure bleue multipliées par 3 : $B'C' = 3 \times 3 = 9$ cm.
 $B'E' = 3 \times 6 = 18$ cm.
- L'aire de la figure rose est égale à l'aire de la figure bleue multipliée par 9 (car $3^2 = 3 \times 3 = 9$)

Propriété :

Une figure et son image par une homothétie ont la même **forme** L'homothétie conserve l'**alignement** et les **angles**

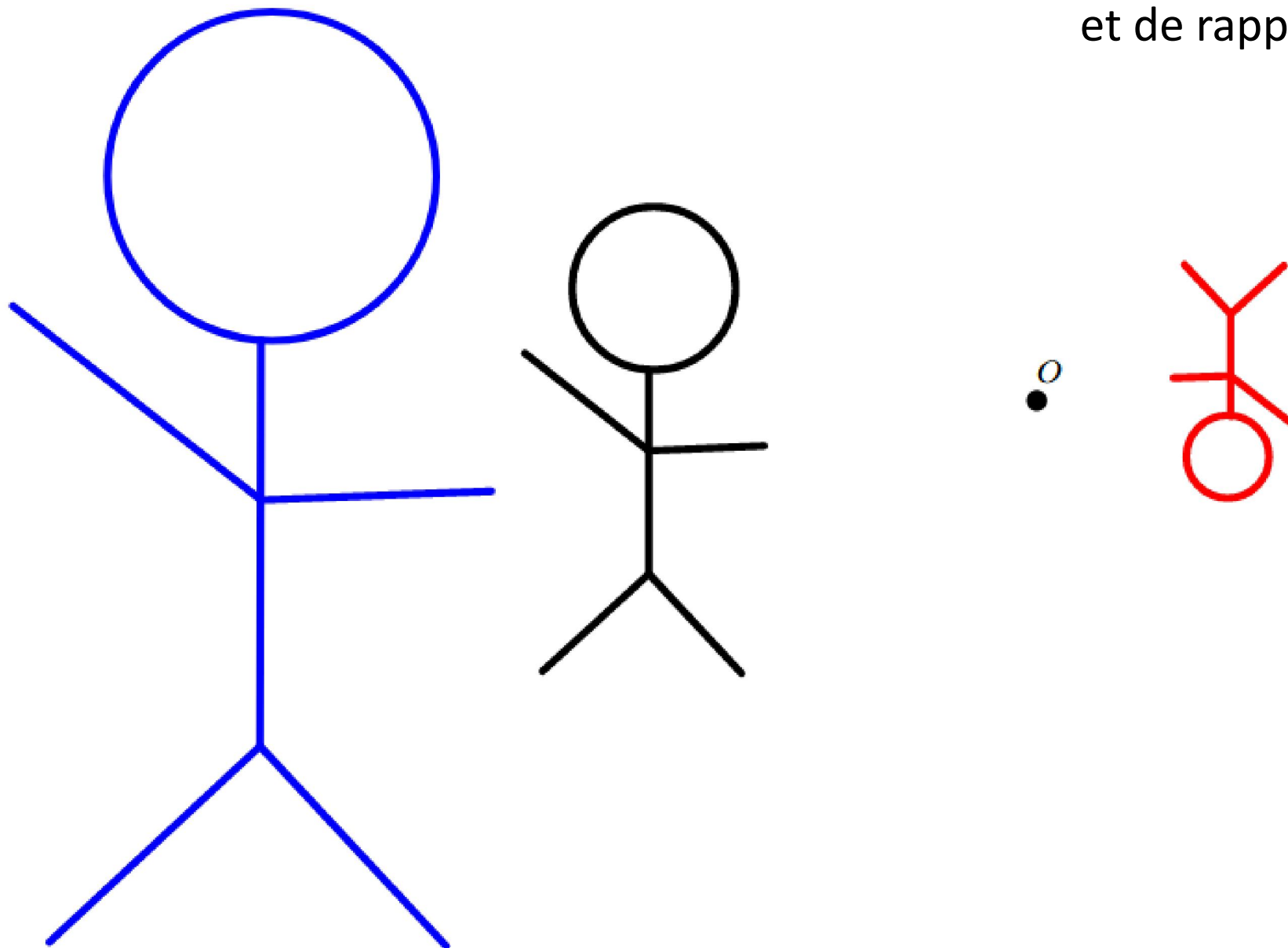
De plus, pour une homothétie de rapport $k > 0$, les longueurs sont multipliées par **k** et les aires par **k^2**

Exemple :

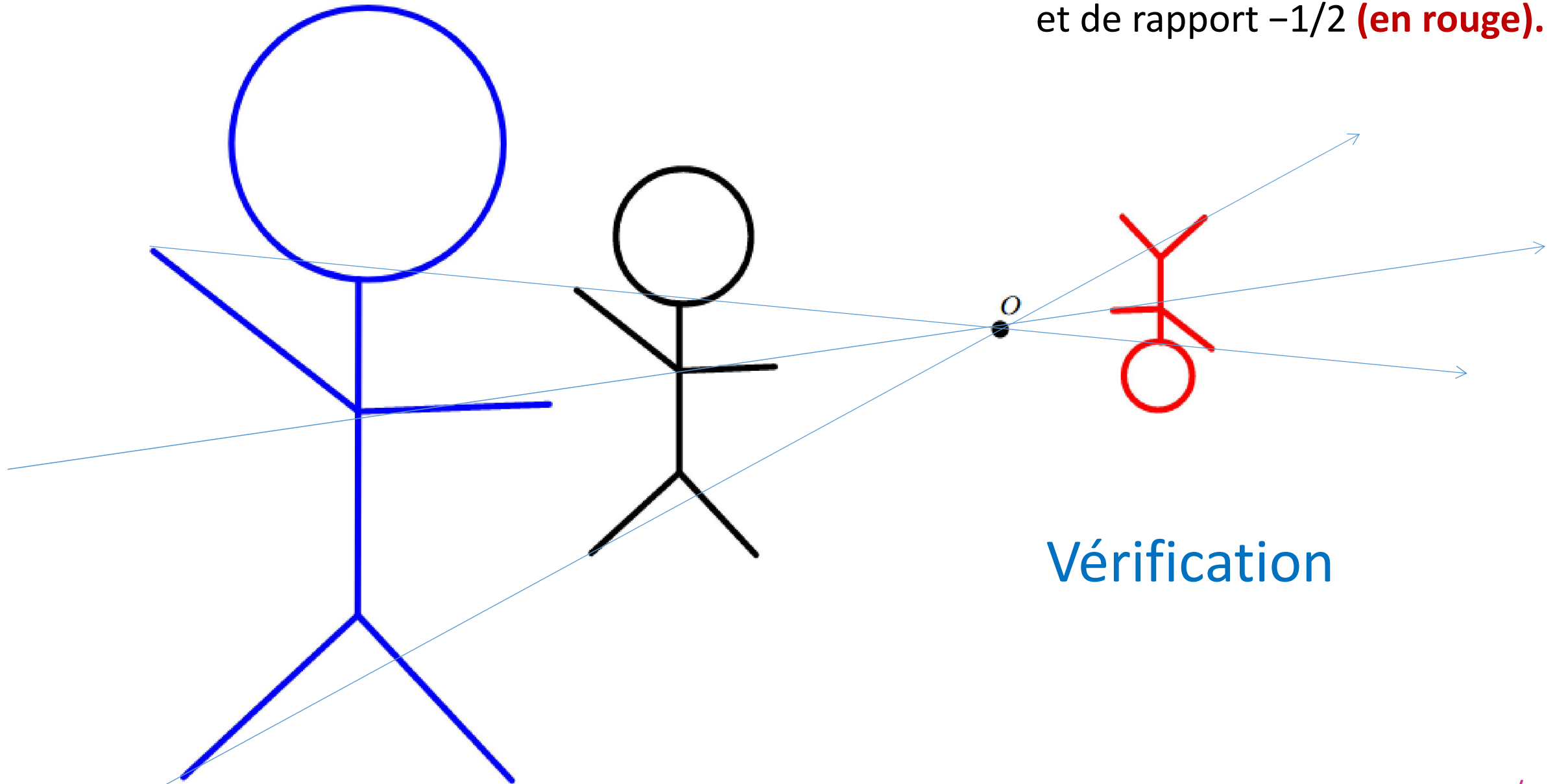


Exemples

Voici une figure et son image par les homothéties de centre O et de rapport 2 (**en bleu**)
et de rapport $-1/2$ (**en rouge**).



Voici une figure et son image par les homothéties de centre O et de rapport 2 (en bleu) et de rapport $-1/2$ (en rouge).



Vérification



Homothétie
de centre O et
de rapport $k = 2$



Figure de
départ $k = 1$



Homothétie
de centre O et
de rapport $k = 0,5$



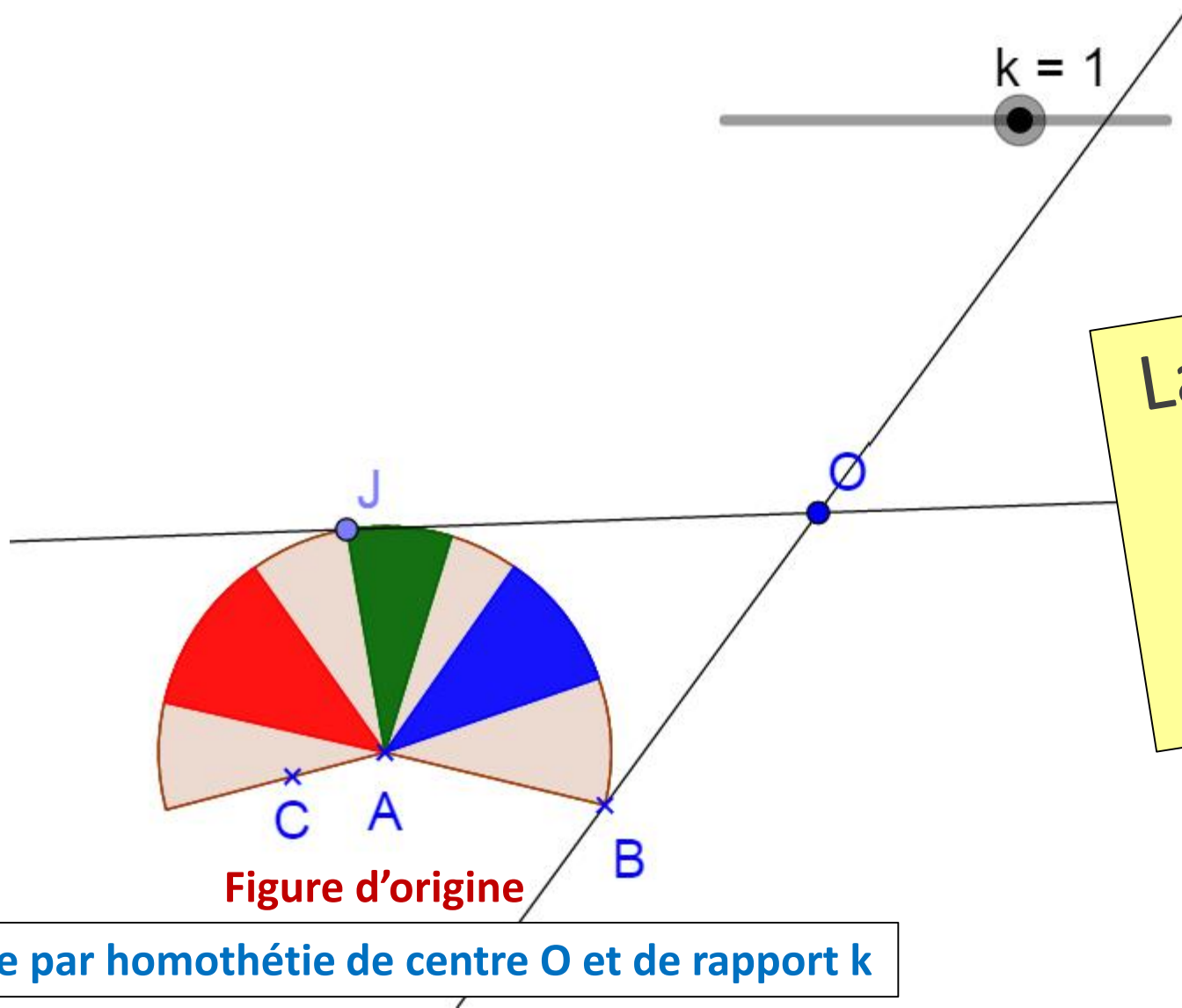
Homothétie
de centre O et
de rapport $k = -0,5$



Homothétie
de centre O et
de rapport $k = -1$



Homothétie
de centre O et
de rapport $k = -2$



La figure d'origine et son image sont superposées l'une sur l'autre !

Image par homothétie de centre O et de rapport k

$$k = -0.5$$

Image par homothétie de centre O et de rapport k

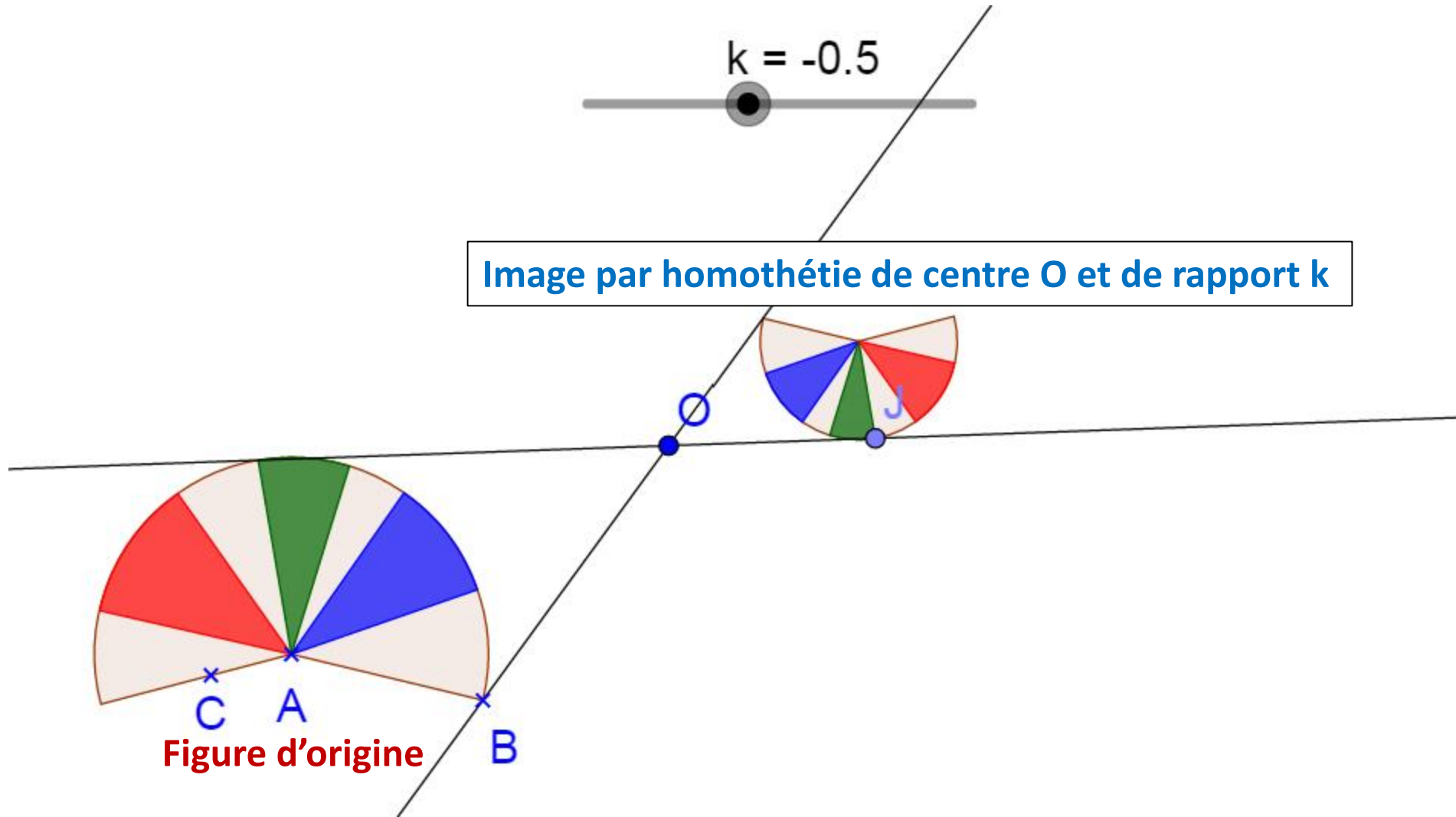
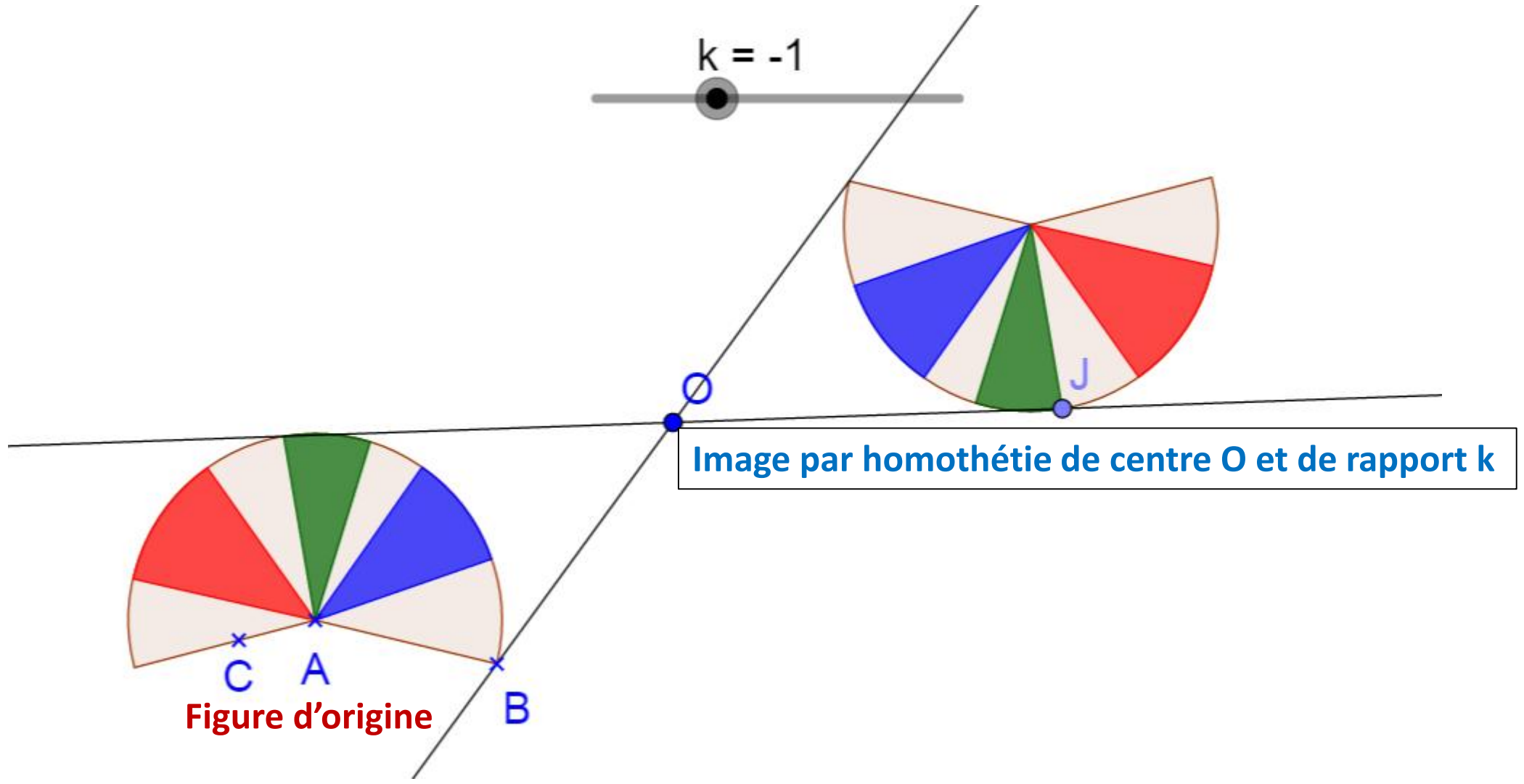


Figure d'origine





$k = -2$

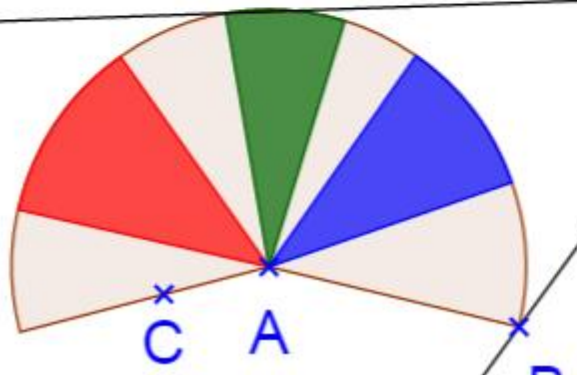
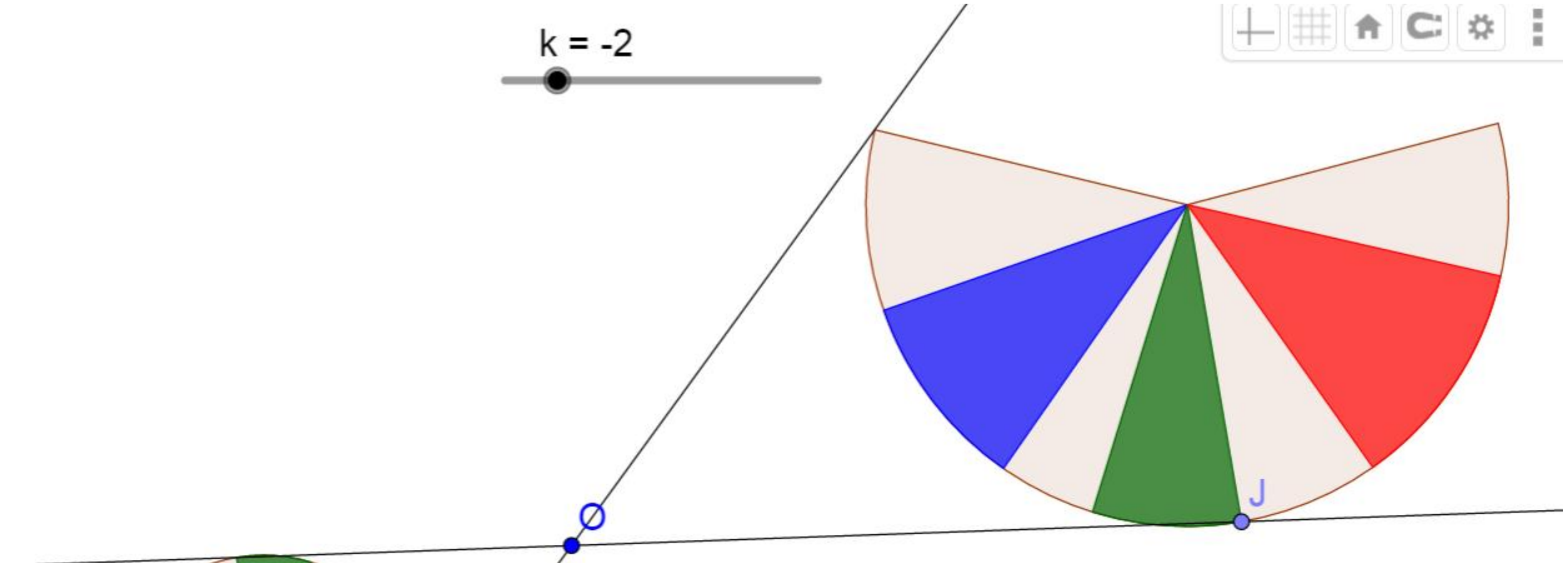
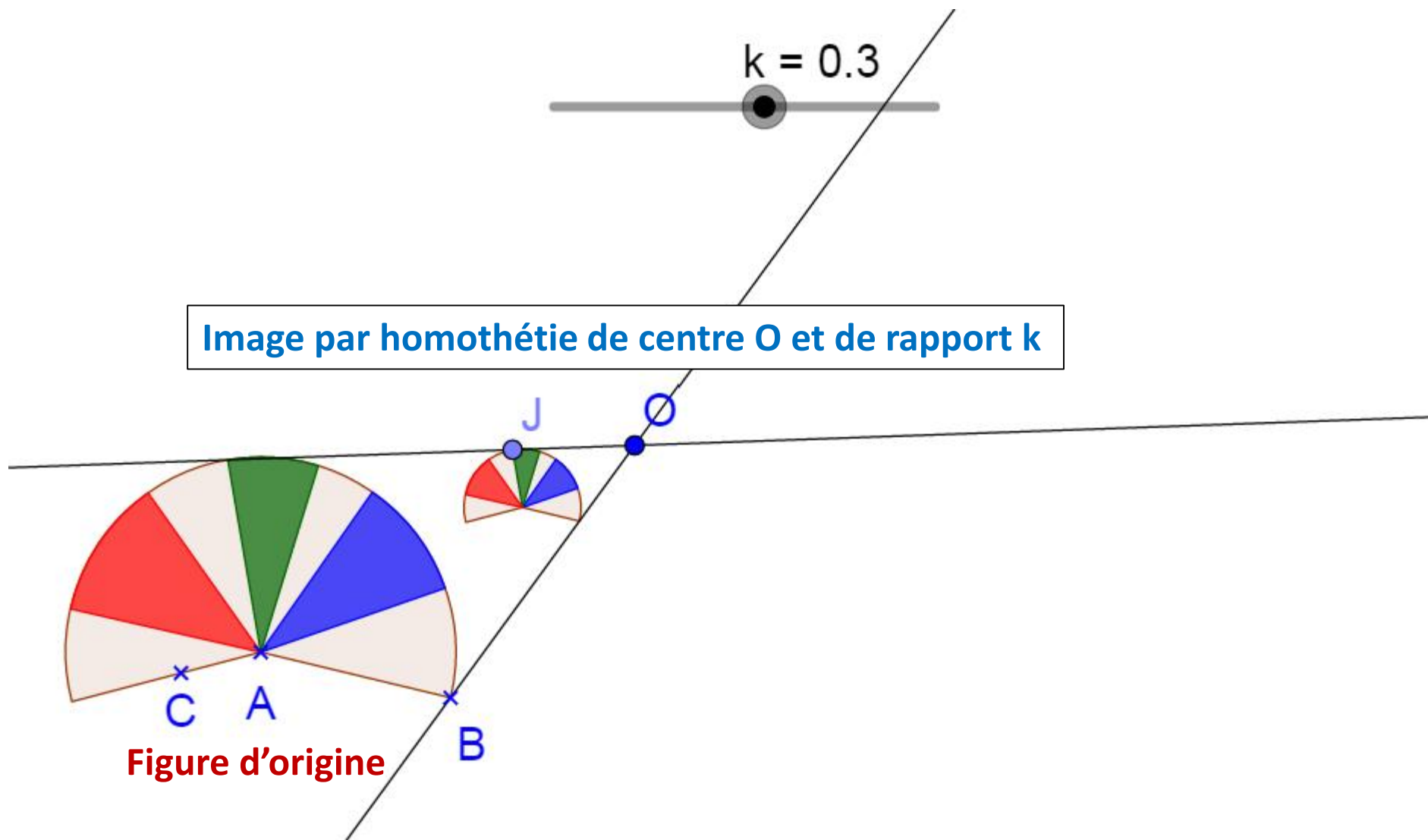
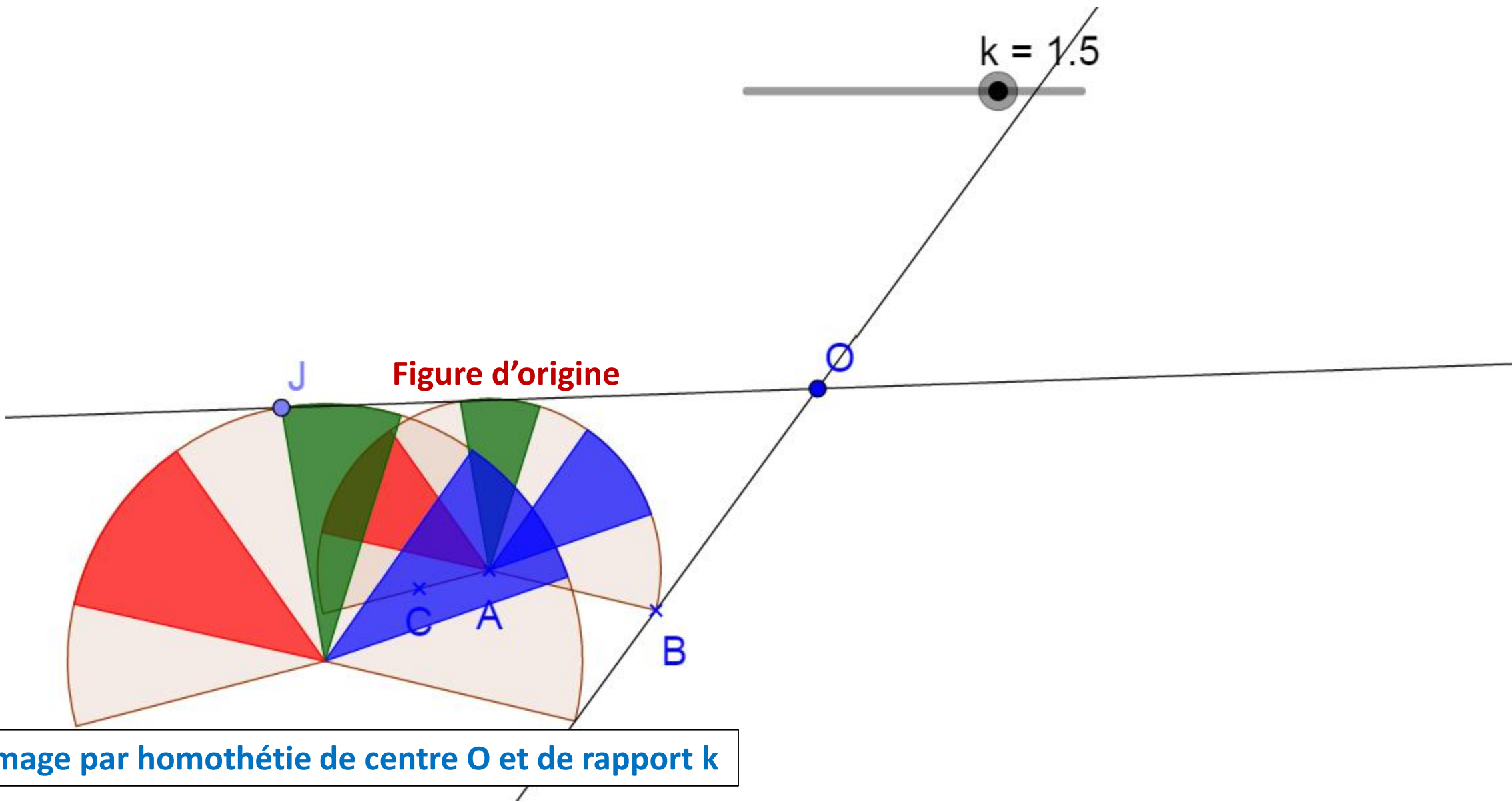


Figure d'origine

Image par homothétie de centre O et de rapport k





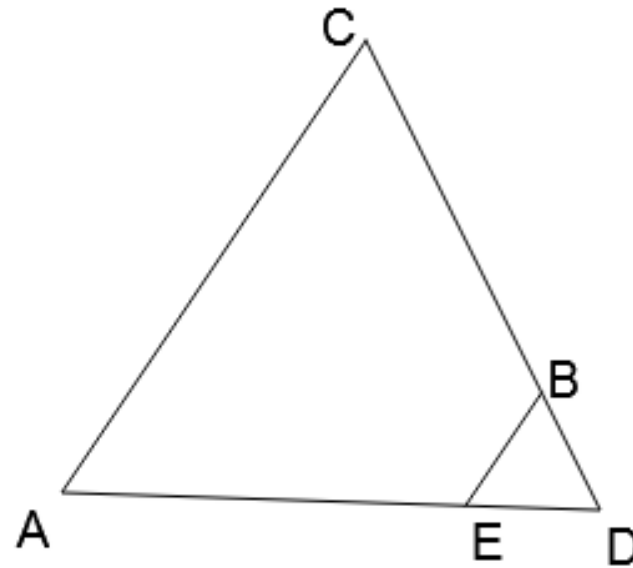
Exercices

Dans cet exercice, un triangle est l'image d'un autre par une homothétie. Déterminer le centre et le rapport de cette homothétie en utilisant les longueurs données dans l'énoncé.

Le triangle DAC est l'image du triangle DEB par une homothétie.
 $CA = 12\text{cm}$, $CD = 11\text{cm}$, $AD = 10\text{cm}$ et $DE = 2\text{cm}$.

Le centre de l'homothétie est

et le rapport est égal à

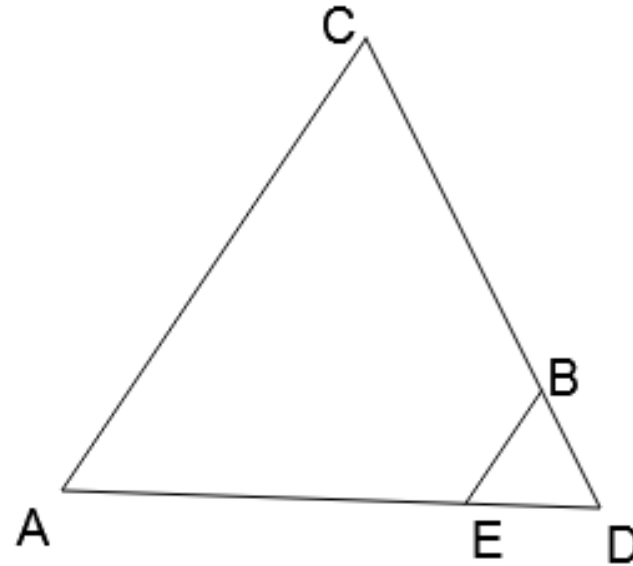


Dans cet exercice, un triangle est l'image d'un autre par une homothétie. Déterminer le centre et le rapport de cette homothétie en utilisant les longueurs données dans l'énoncé.

Le triangle DAC est l'image du triangle DEB par une homothétie.
CA = 12cm , CD = 11cm , AD = 10cm et DE = 2cm.

Le centre de l'homothétie est **D**

et le rapport est égal à $\frac{10}{2} = 5$



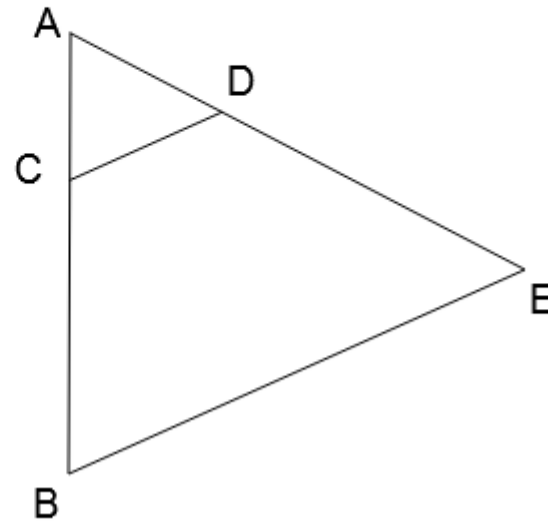
Réponse

Dans cet exercice, un triangle est l'image d'un autre par une homothétie. Déterminer le centre et le rapport de cette homothétie en utilisant les longueurs données dans l'énoncé.

Le triangle ADC est l'image du triangle AEB par une homothétie.
 $AB = 11\text{cm}$, $AE = 13\text{cm}$, $BE = 12\text{cm}$ et $ED = 8\text{cm}$.

Le centre de l'homothétie est

et le rapport est égal à

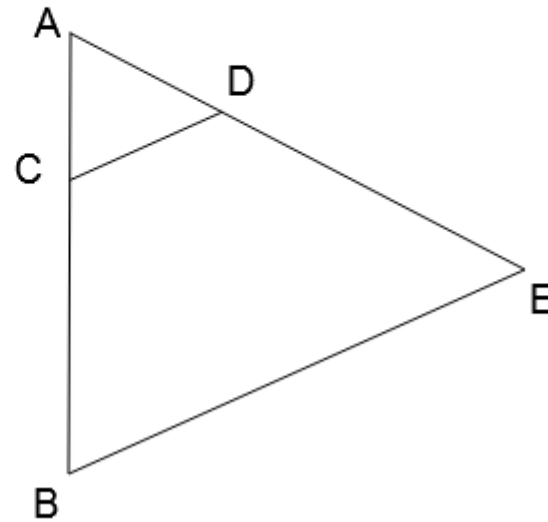


Dans cet exercice, un triangle est l'image d'un autre par une homothétie. Déterminer le centre et le rapport de cette homothétie en utilisant les longueurs données dans l'énoncé.

Le triangle ADC est l'image du triangle AEB par une homothétie.
AB = 11cm , AE = 13cm , BE = 12cm et ED = 8cm.

Le centre de l'homothétie est **A**

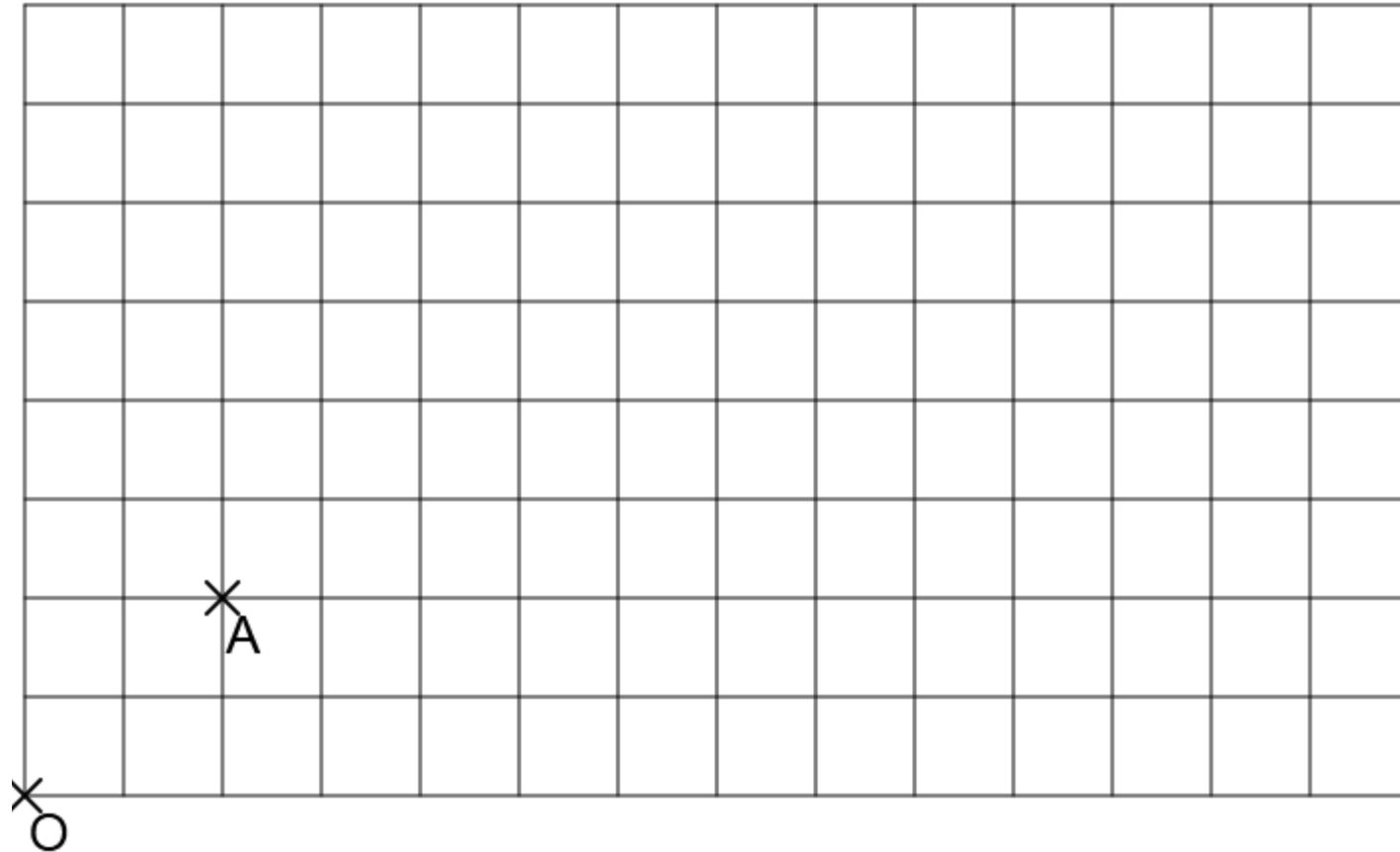
et le rapport est égal $\frac{5}{13}$



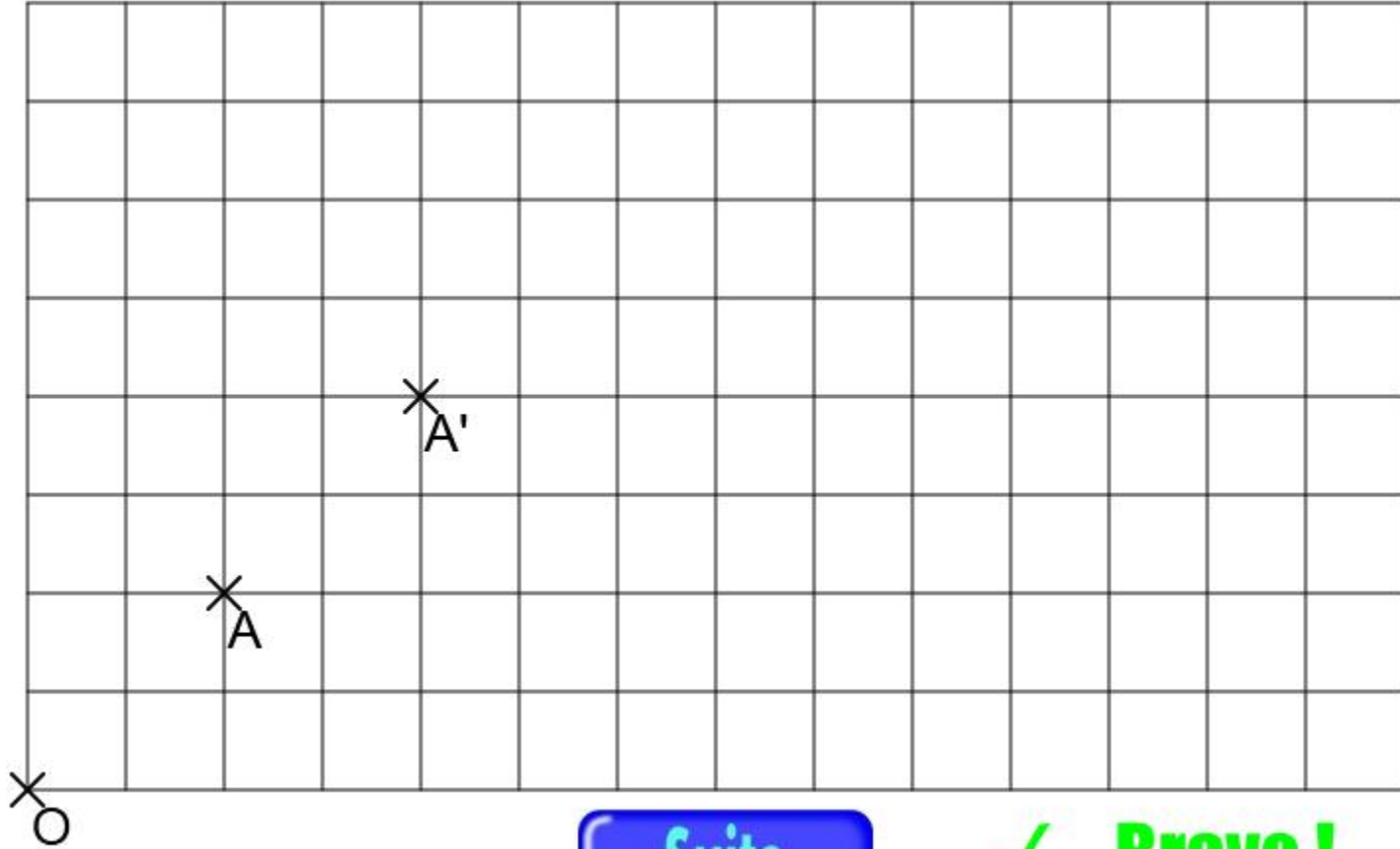
Réponse

Place l'image du point par l'homothétie donnée en utilisant le quadrillage

Place l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 2.



Réponse

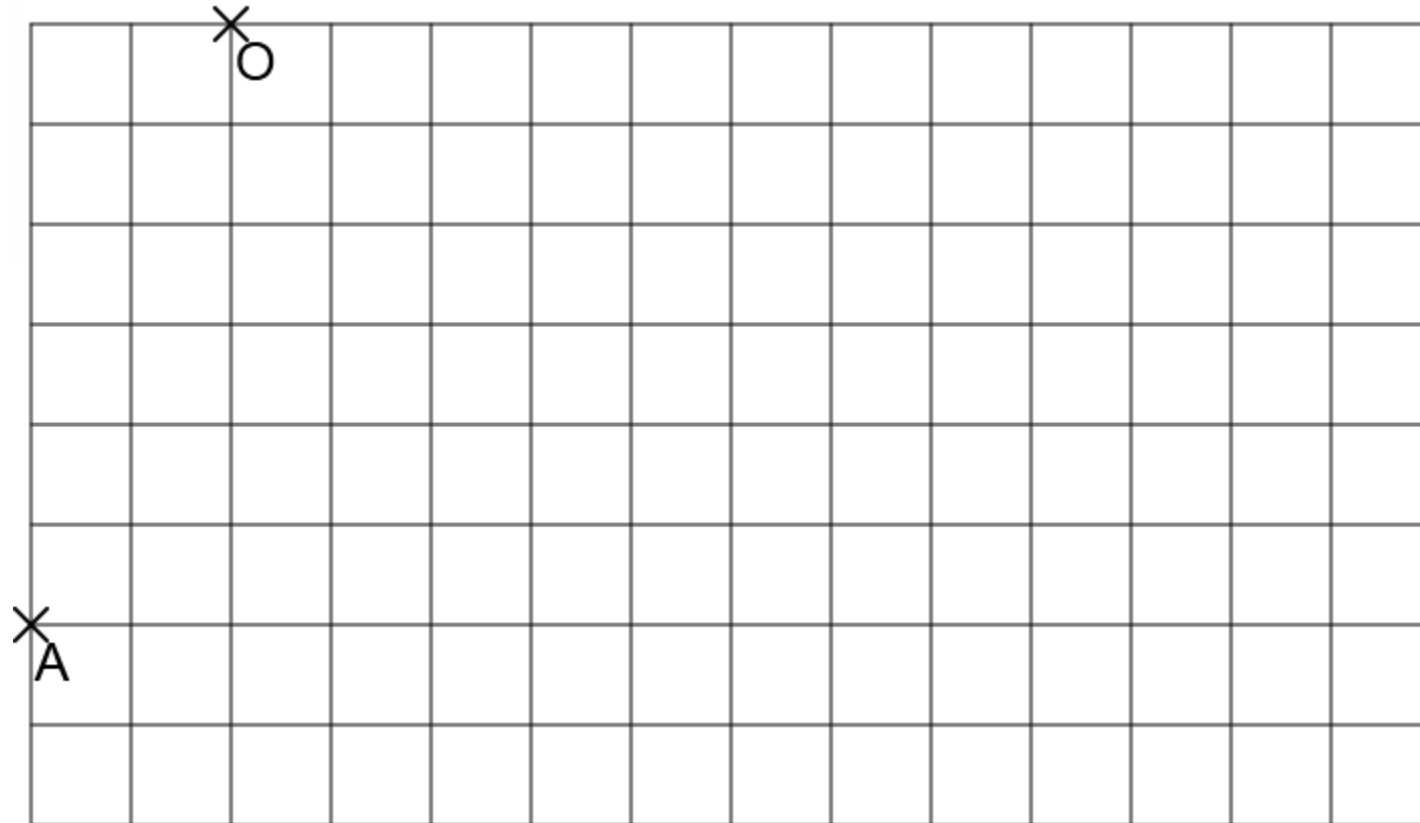


Suite

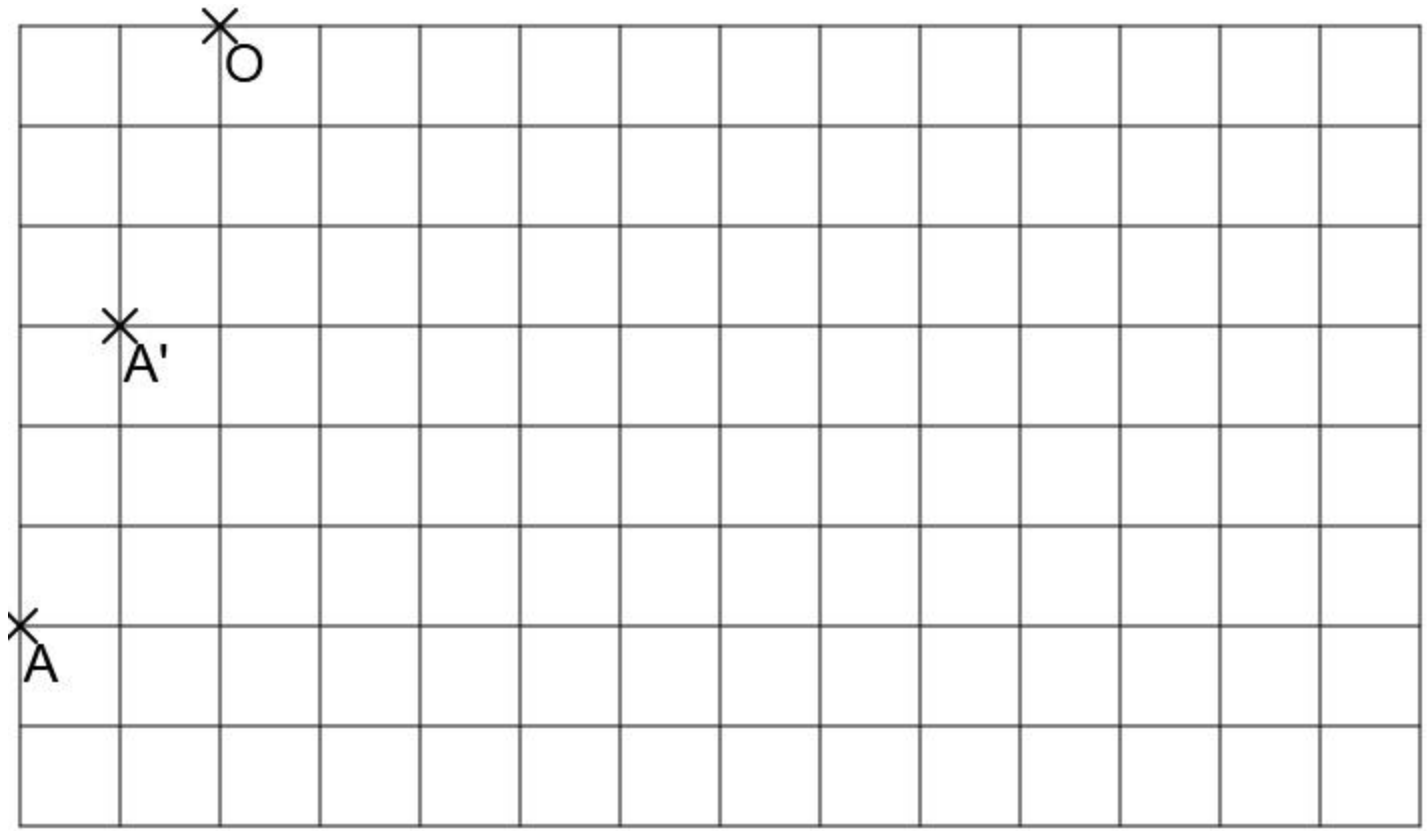
✓ Bravo !

Place l'image du point par l'homothétie donnée en utilisant le quadrillage

Place l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport $1/2$.



Réponse

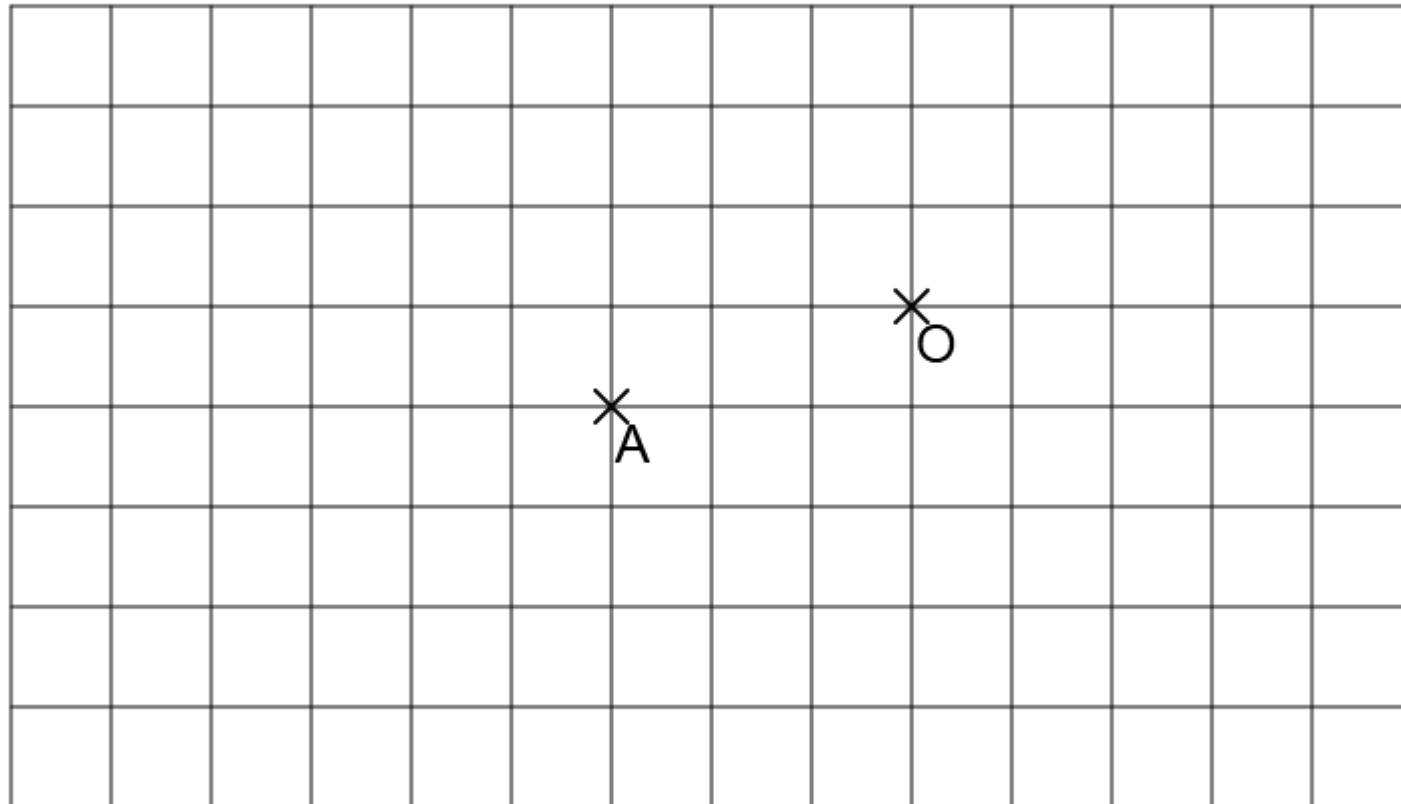


Suite

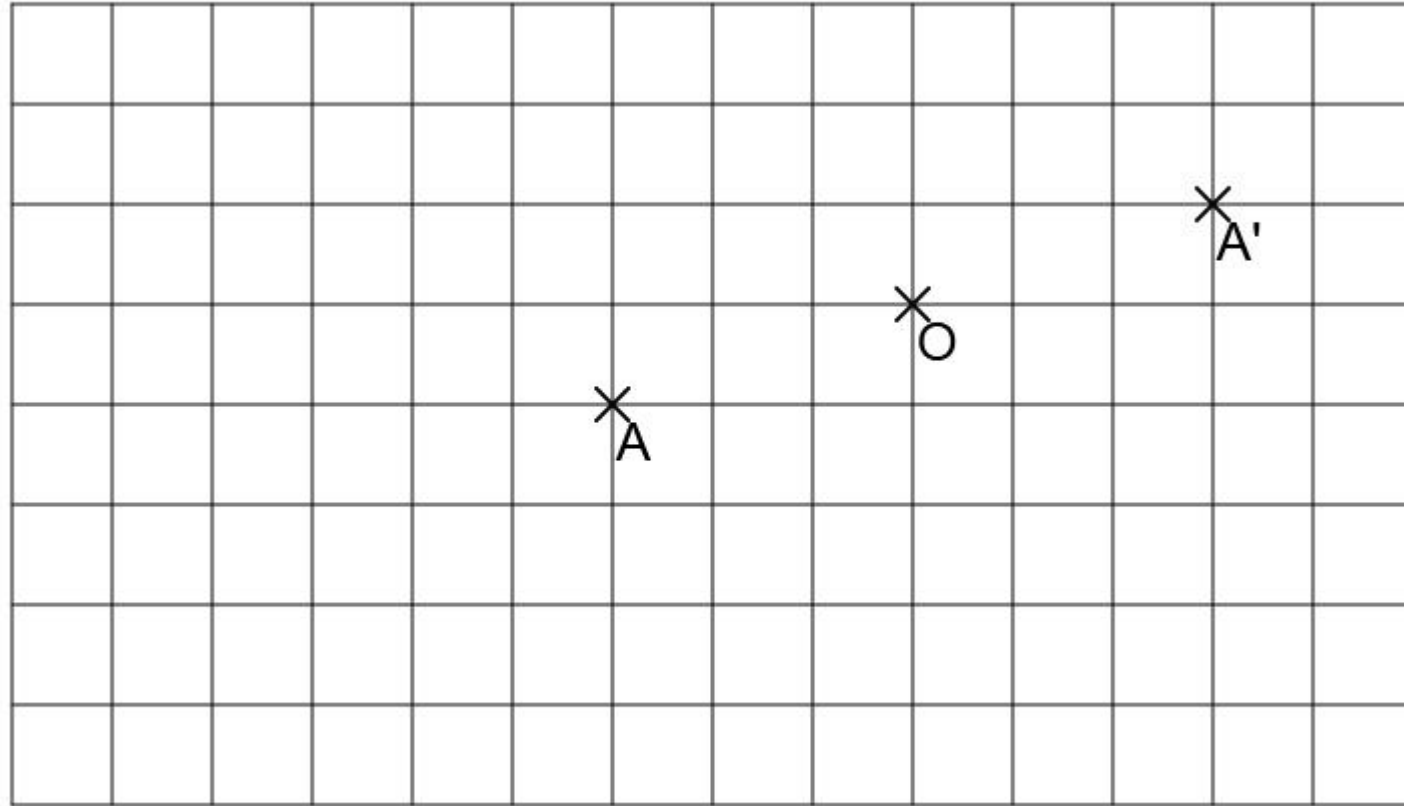
✓ Bravo !

Place l'image du point par l'homothétie donnée en utilisant le quadrillage

Place l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -1.



Bravo! Clique sur suite pour continuer



Réponse

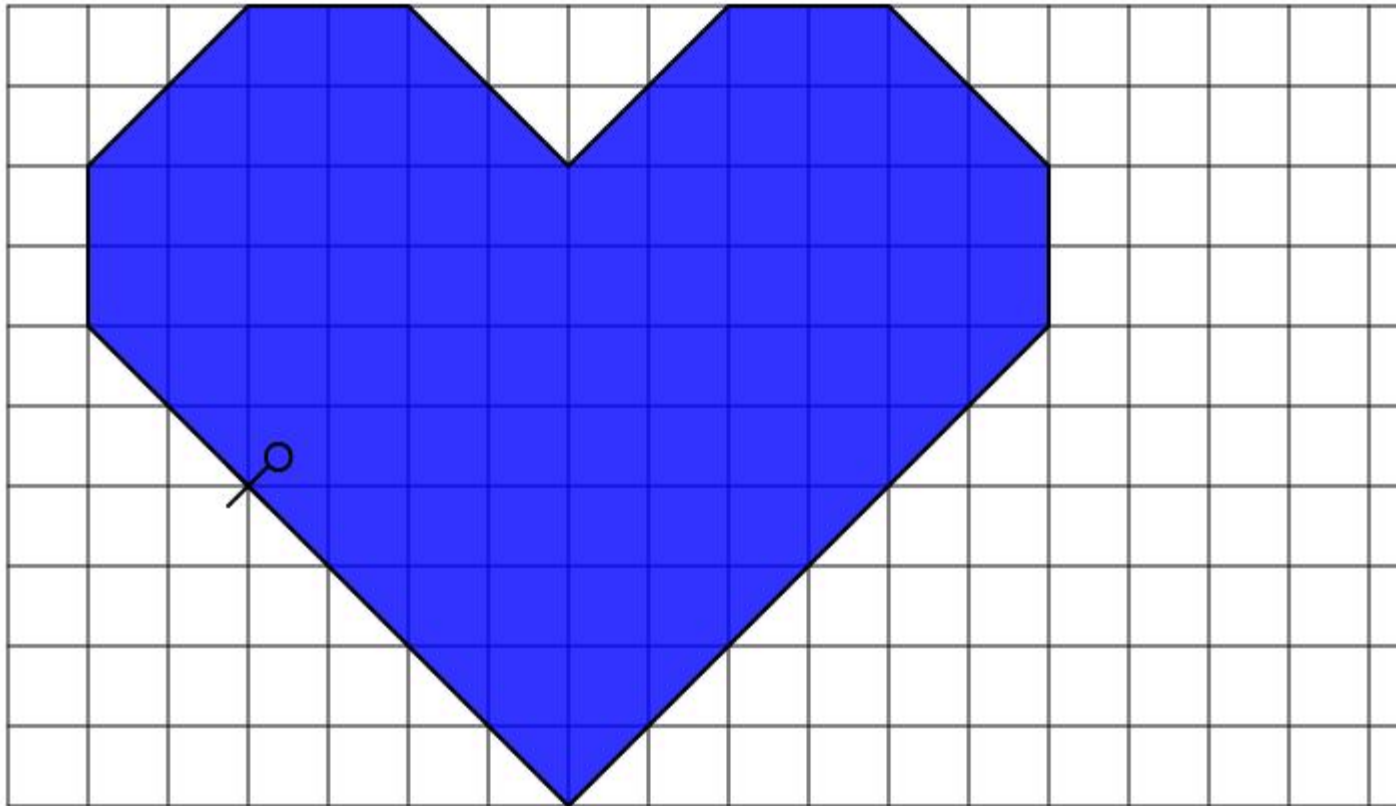
Suite



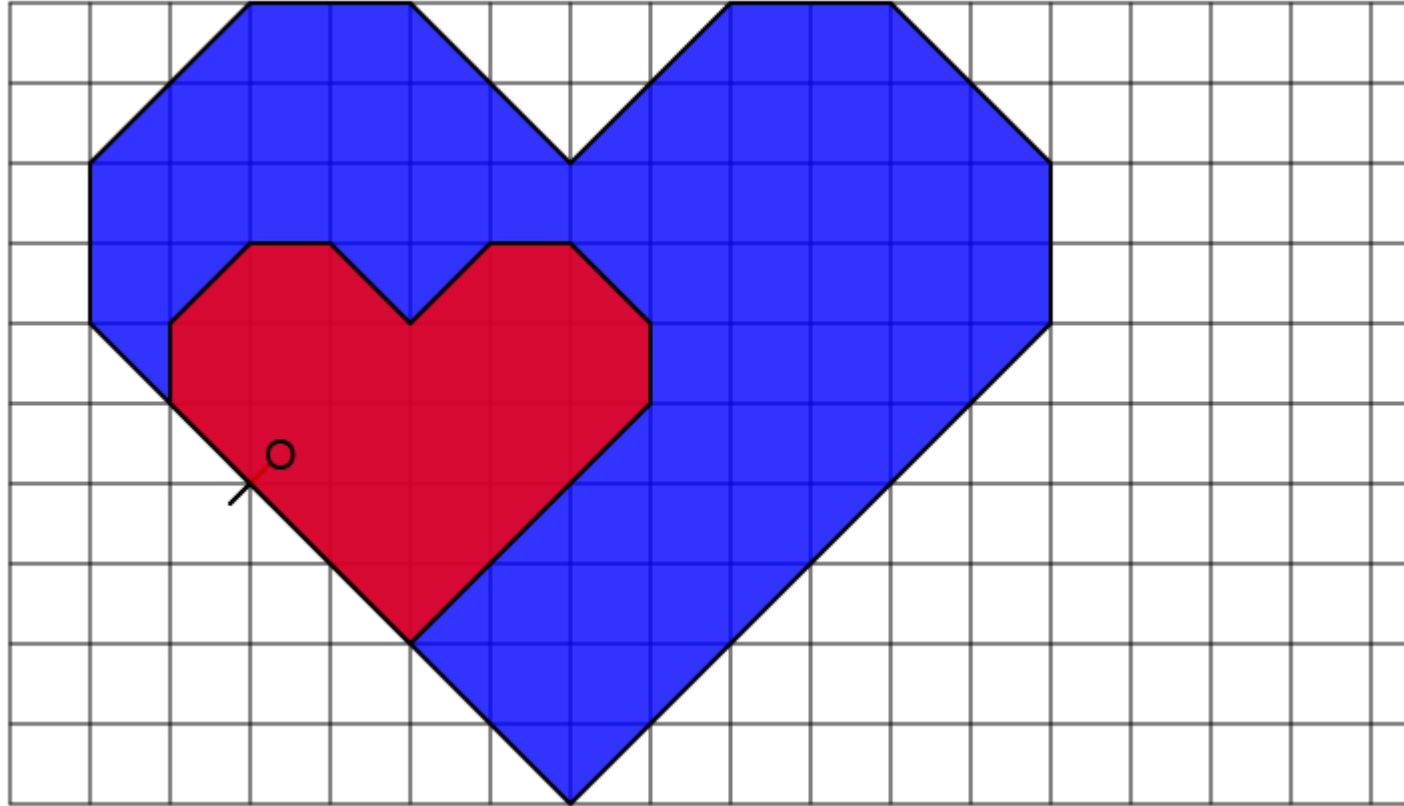
Bravo !

Place point par point l'image de deux figures par une homothétie de centre et de rapport donnés en utilisant le quadrillage.

Trace l'image de la figure par l'homothétie de centre O et de rapport $1/2$.

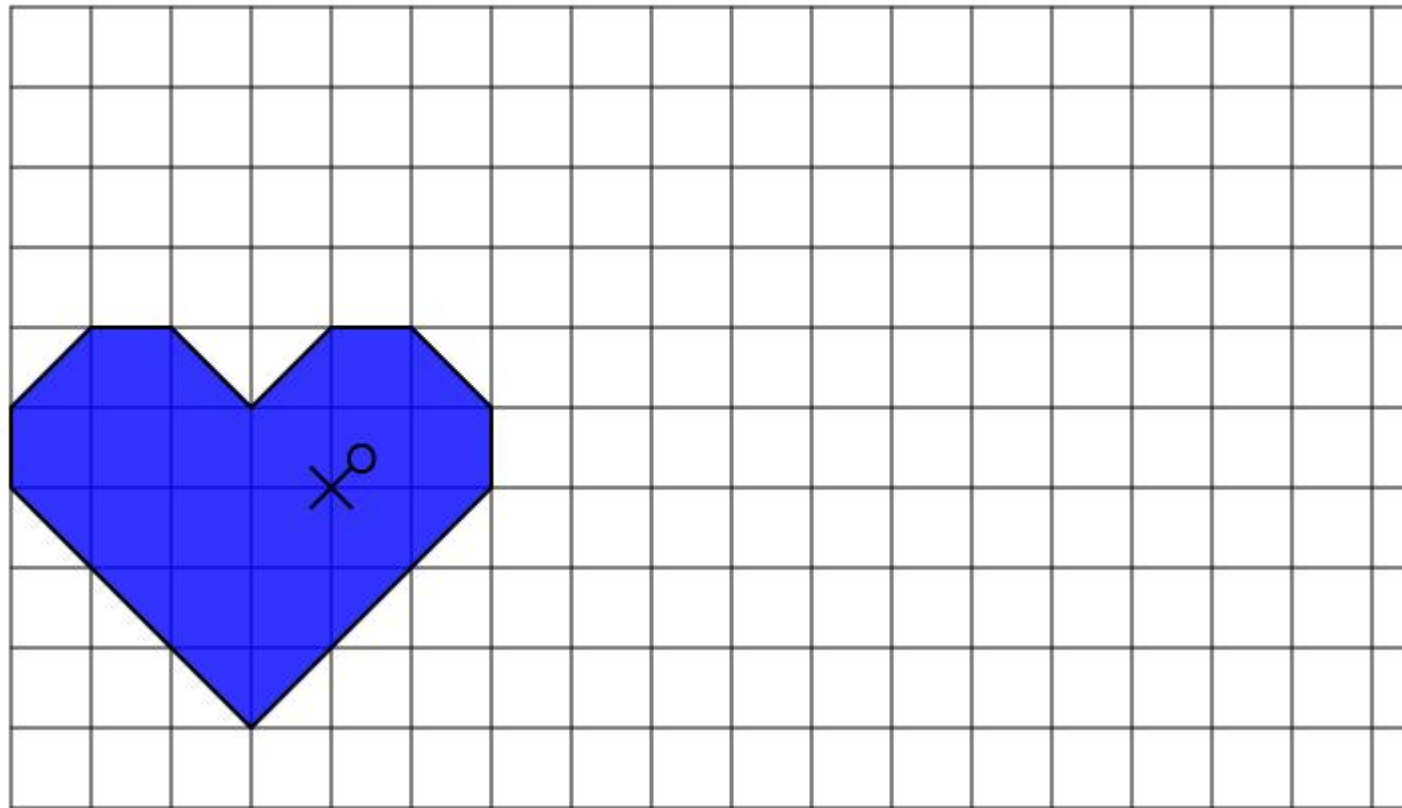


Réponse

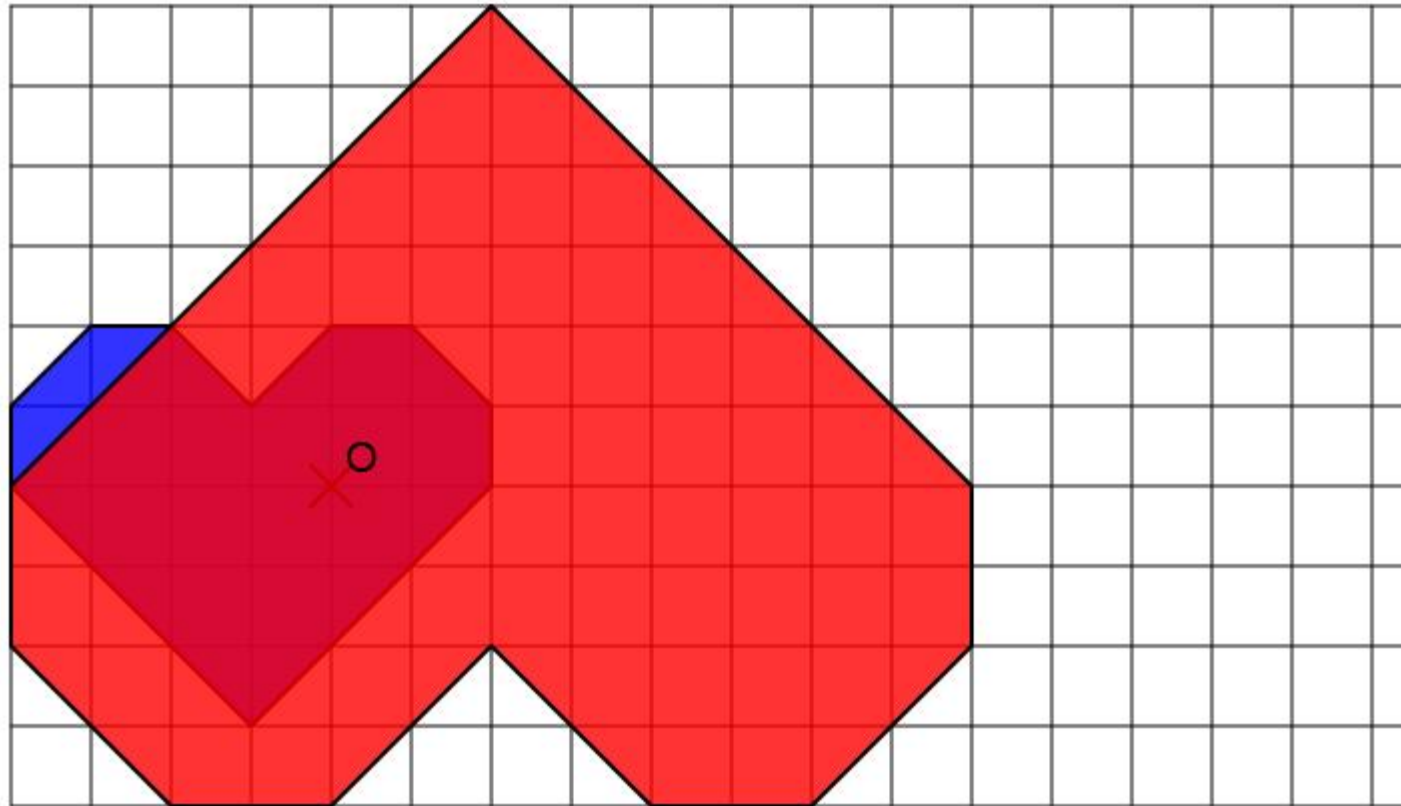


Place point par point l'image de deux figures par une homothétie de centre et de rapport donnés en utilisant le quadrillage.

Trace l'image de la figure par l'homothétie de centre O et de rapport -2.



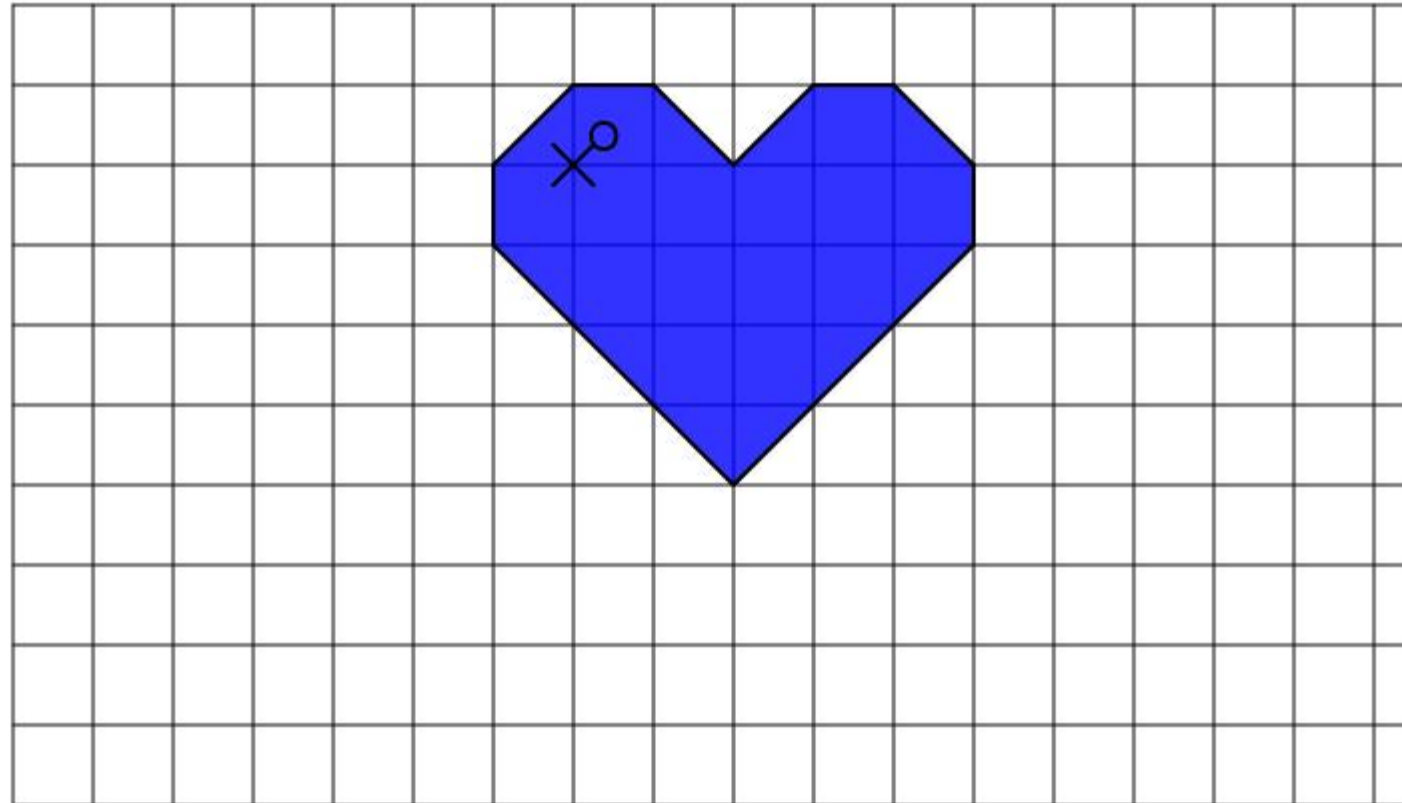
Regarde la correction puis clique sur suite.



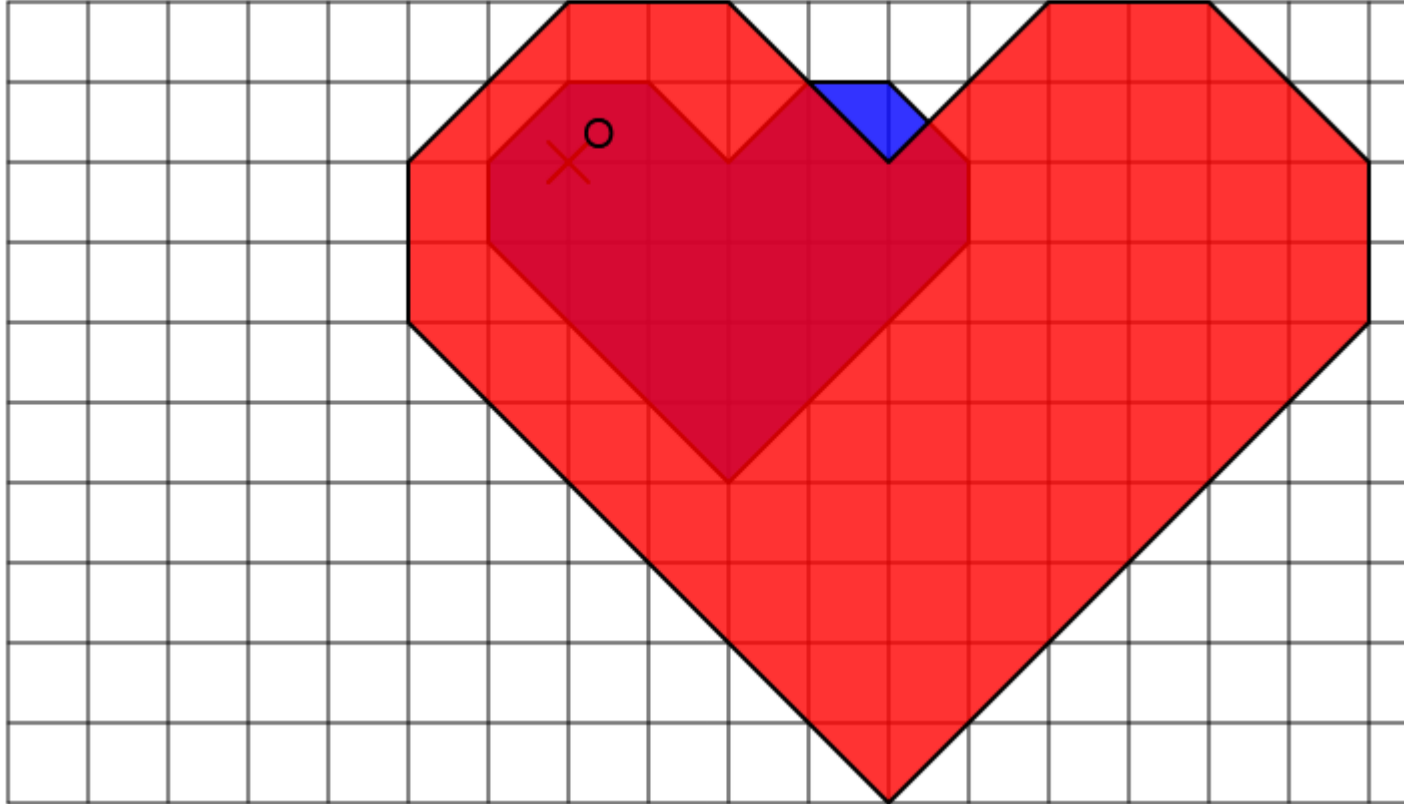
Réponse

Place point par point l'image de deux figures par une homothétie de centre et de rapport donnés en utilisant le quadrillage.

Trace l'image de la figure par l'homothétie de centre O et de rapport 2.

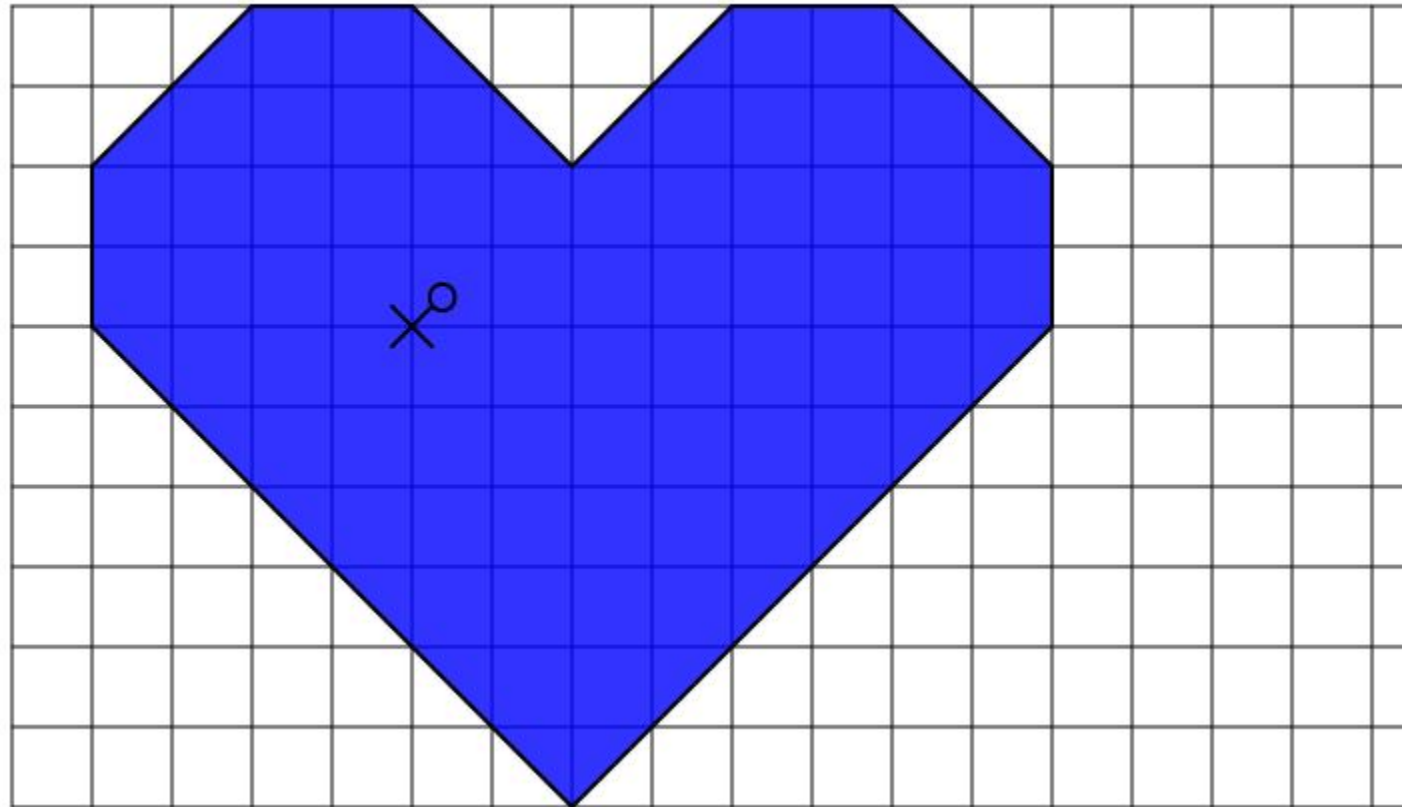


Réponse

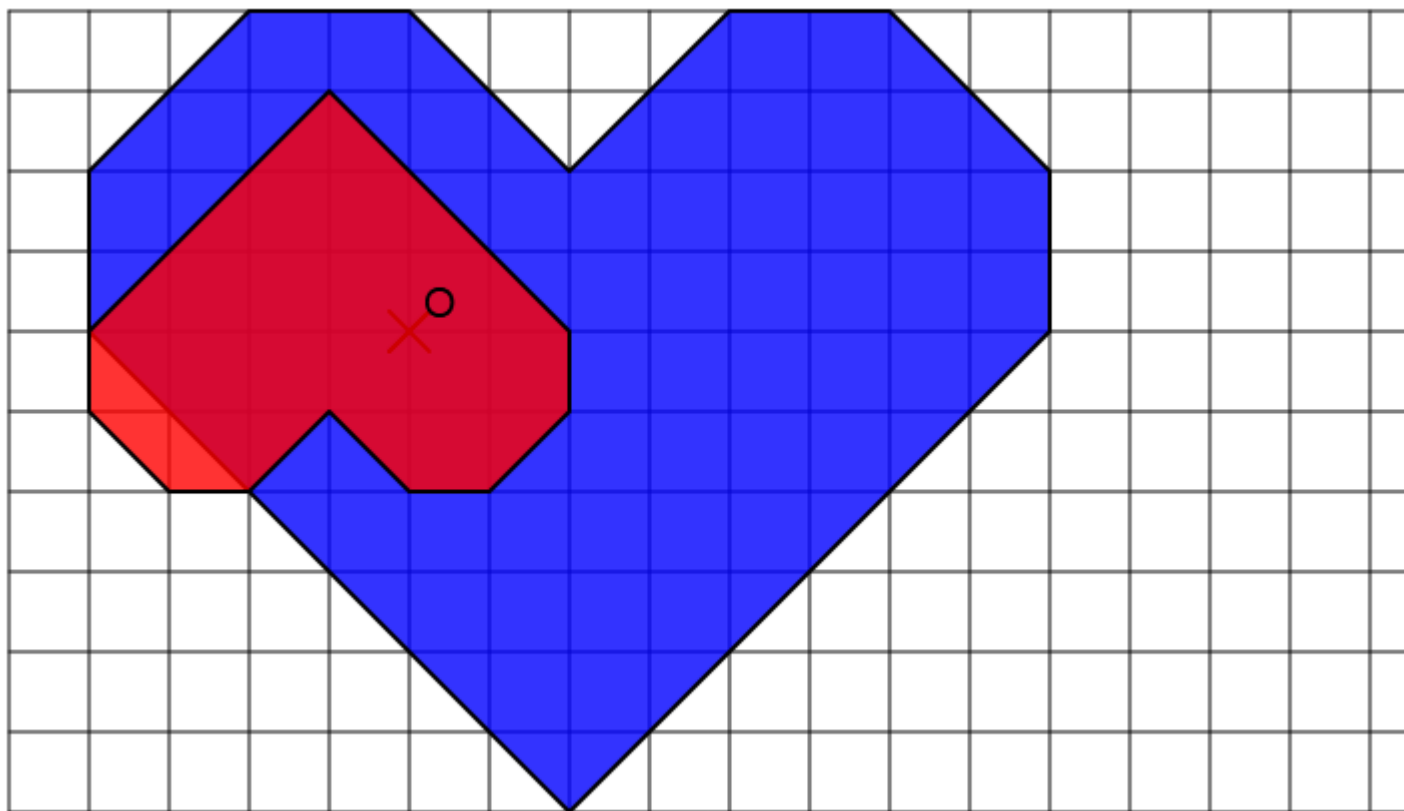


Place point par point l'image de deux figures par une homothétie de centre et de rapport donnés en utilisant le quadrillage.

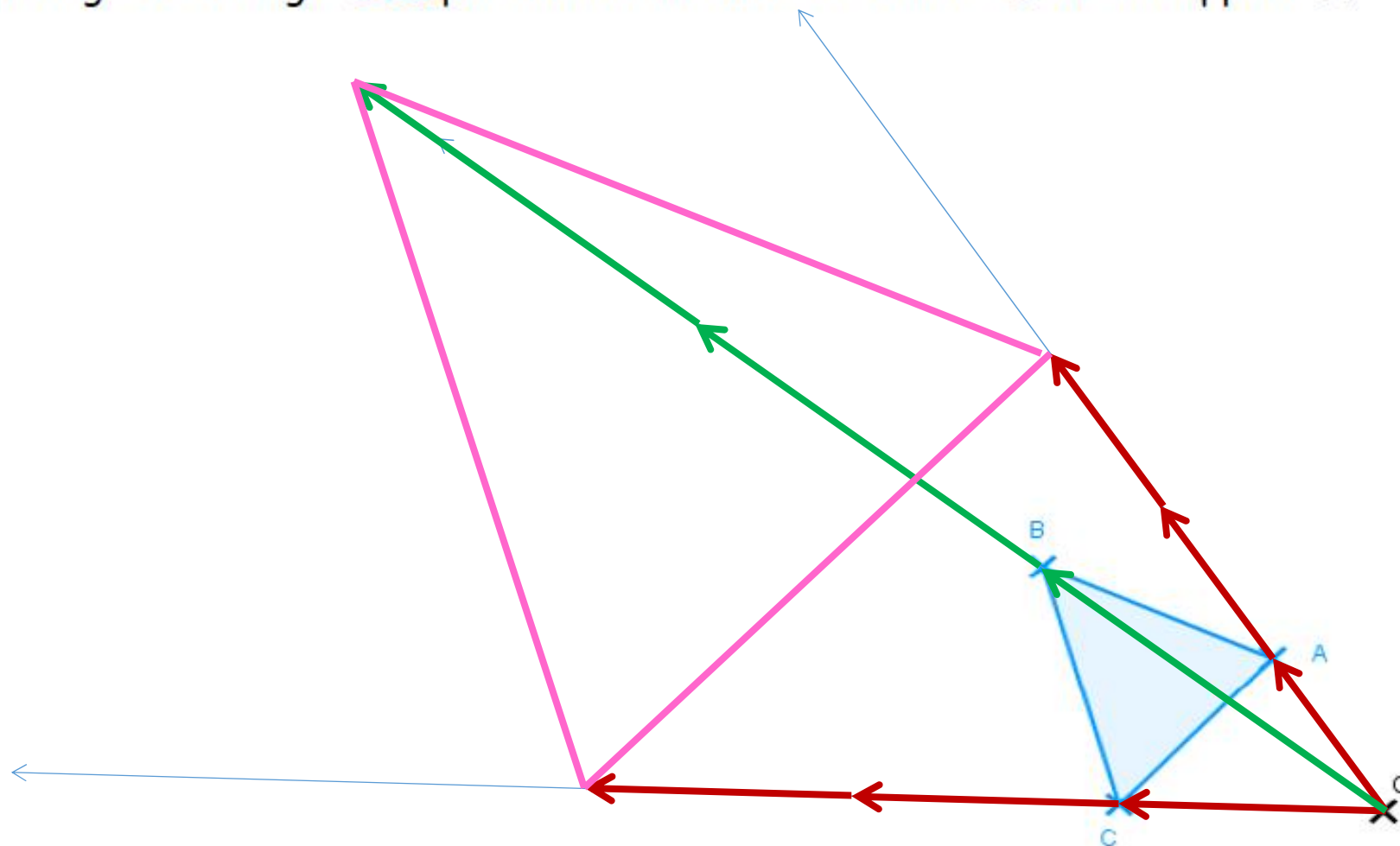
Trace l'image de la figure par l'homothétie de centre O et de rapport $-1/2$.



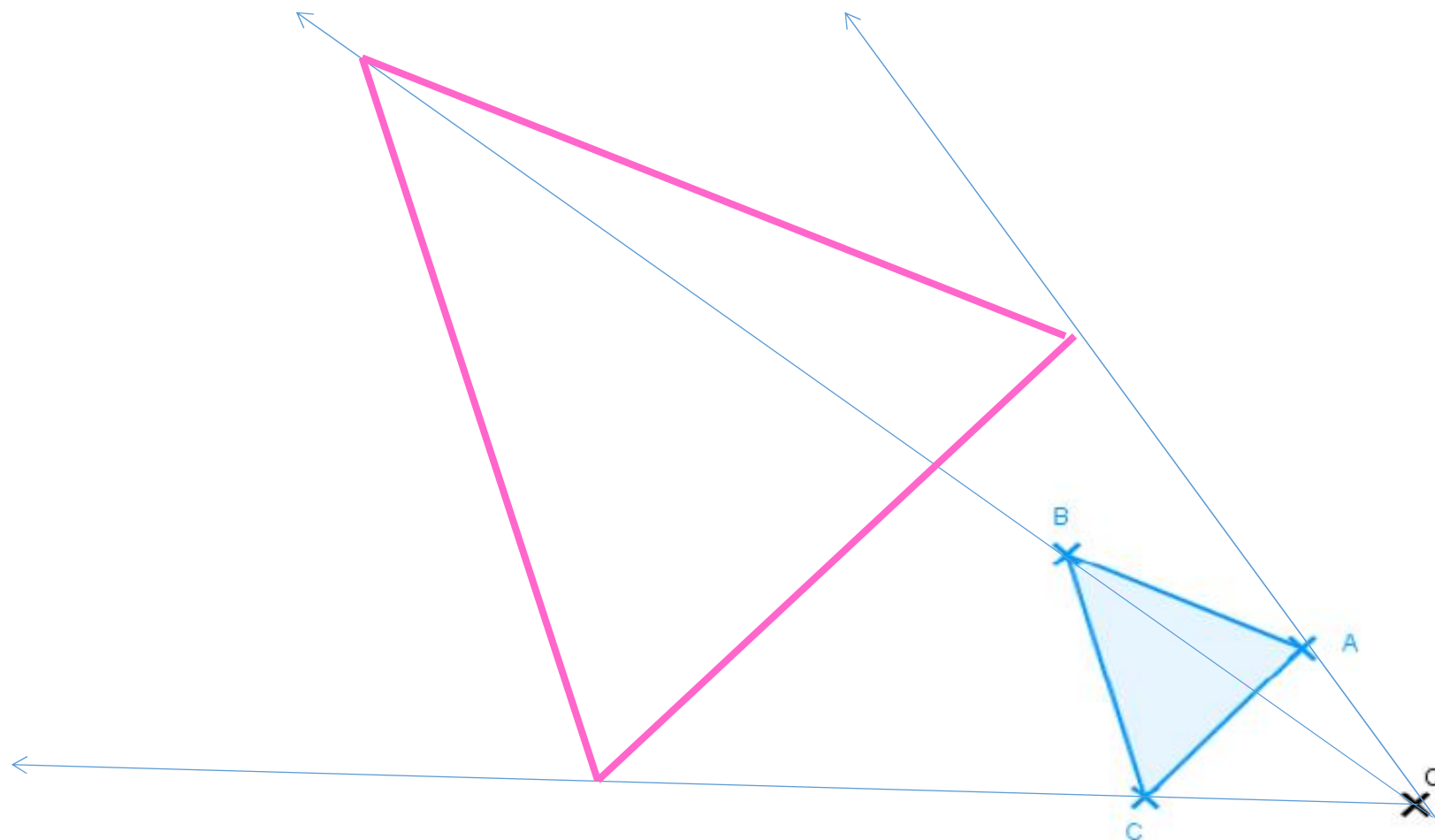
Réponse



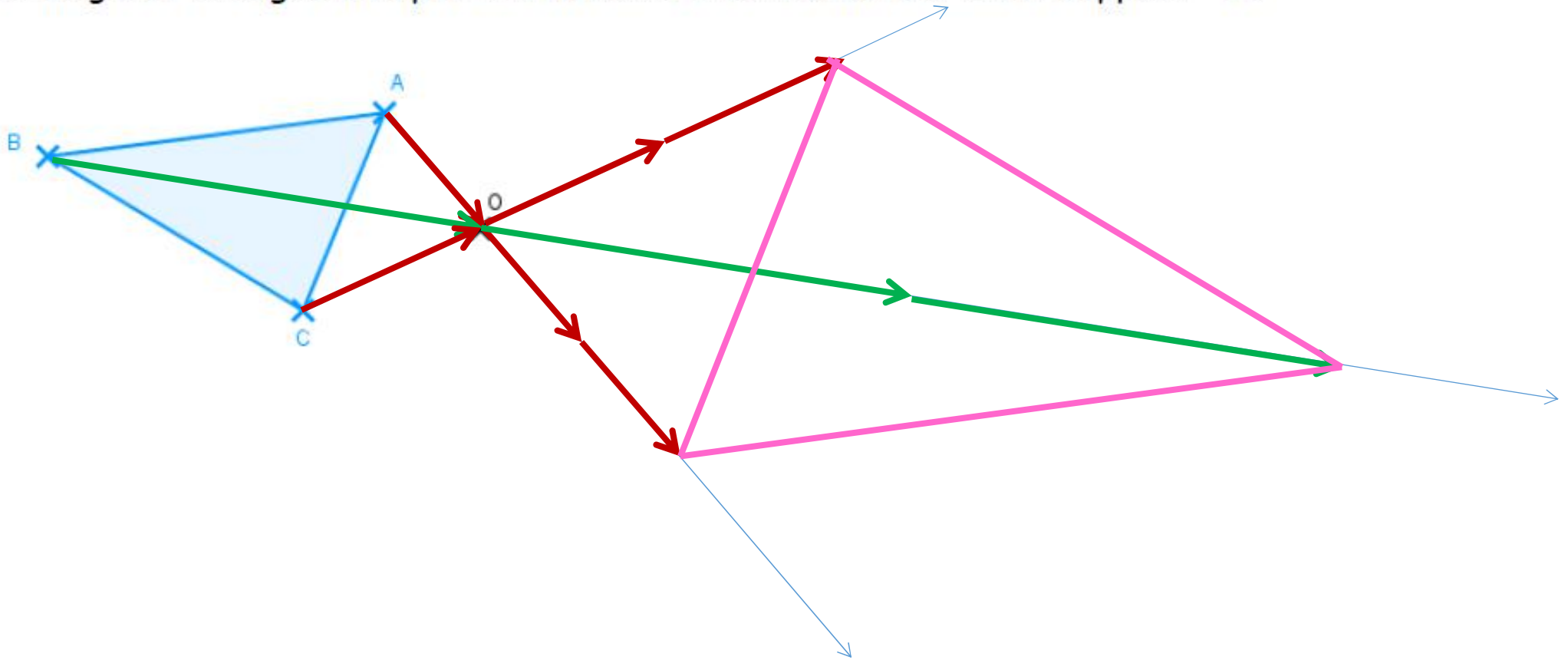
Exercices : 1) Construis l'image du triangle **bleu** par une homothétie de centre **O** et de rapport **3**.



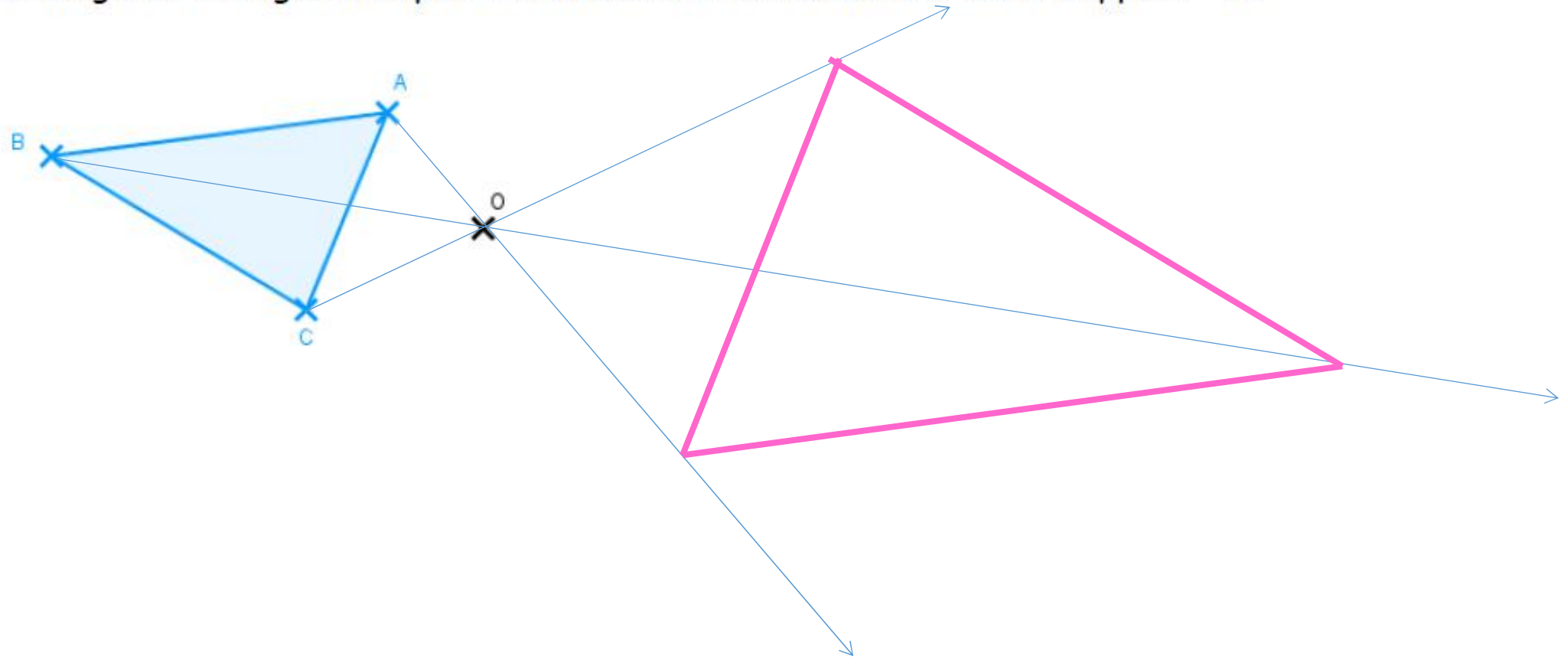
Exercices : 1) Construis l'image du triangle **bleu** par une homothétie de centre **O** et de rapport **3**.



2) Construis l'image du triangle bleu par une homothétie de centre O et de rapport -2 .



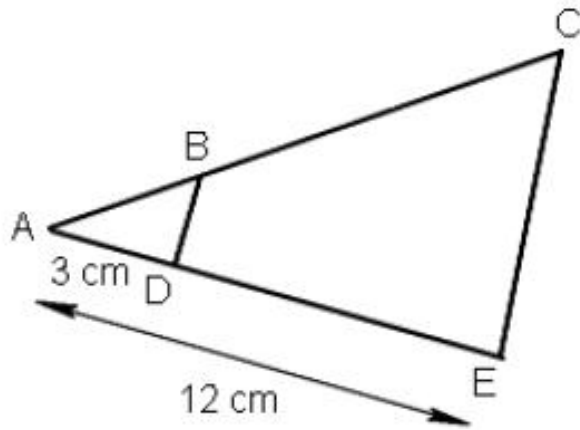
2) Construis l'image du triangle bleu par une homothétie de centre O et de rapport -2 .



3) Dans les 2 cas, le triangle **AEC** est l'image du triangle **ABD** par une homothétie. Retrouve le centre et le rapport.

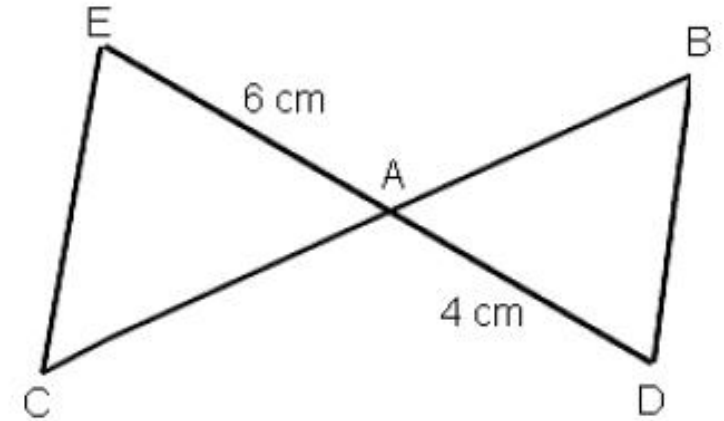
centre : **A**

rapport : **4**



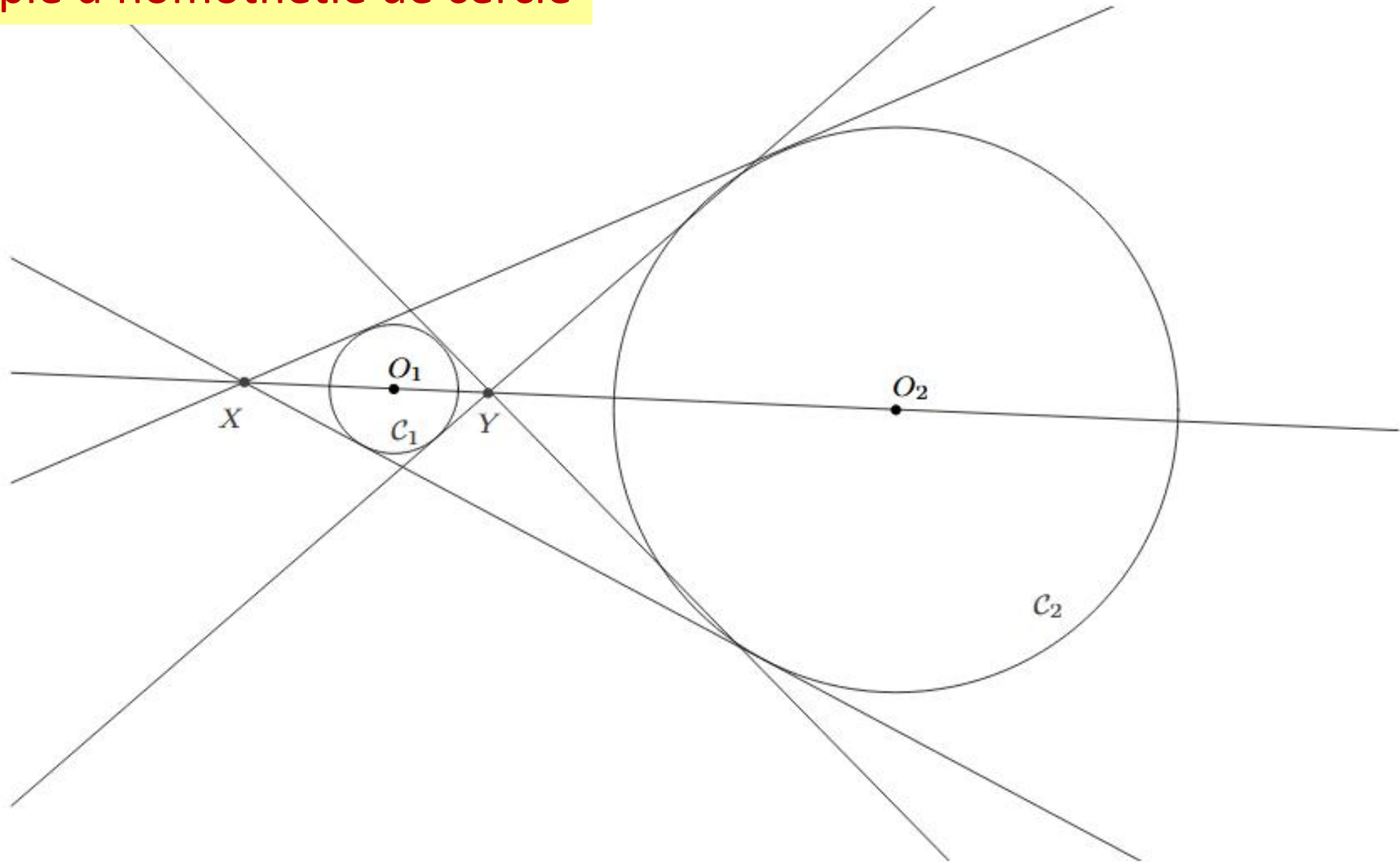
centre : **A**

rapport : **-1,5**



Que dire des droites (BD) et (CE) dans les deux cas de figure ? **Elles semblent parallèles.**

Exemple d'homothétie de cercle



Exemple d'homothétie de cercle

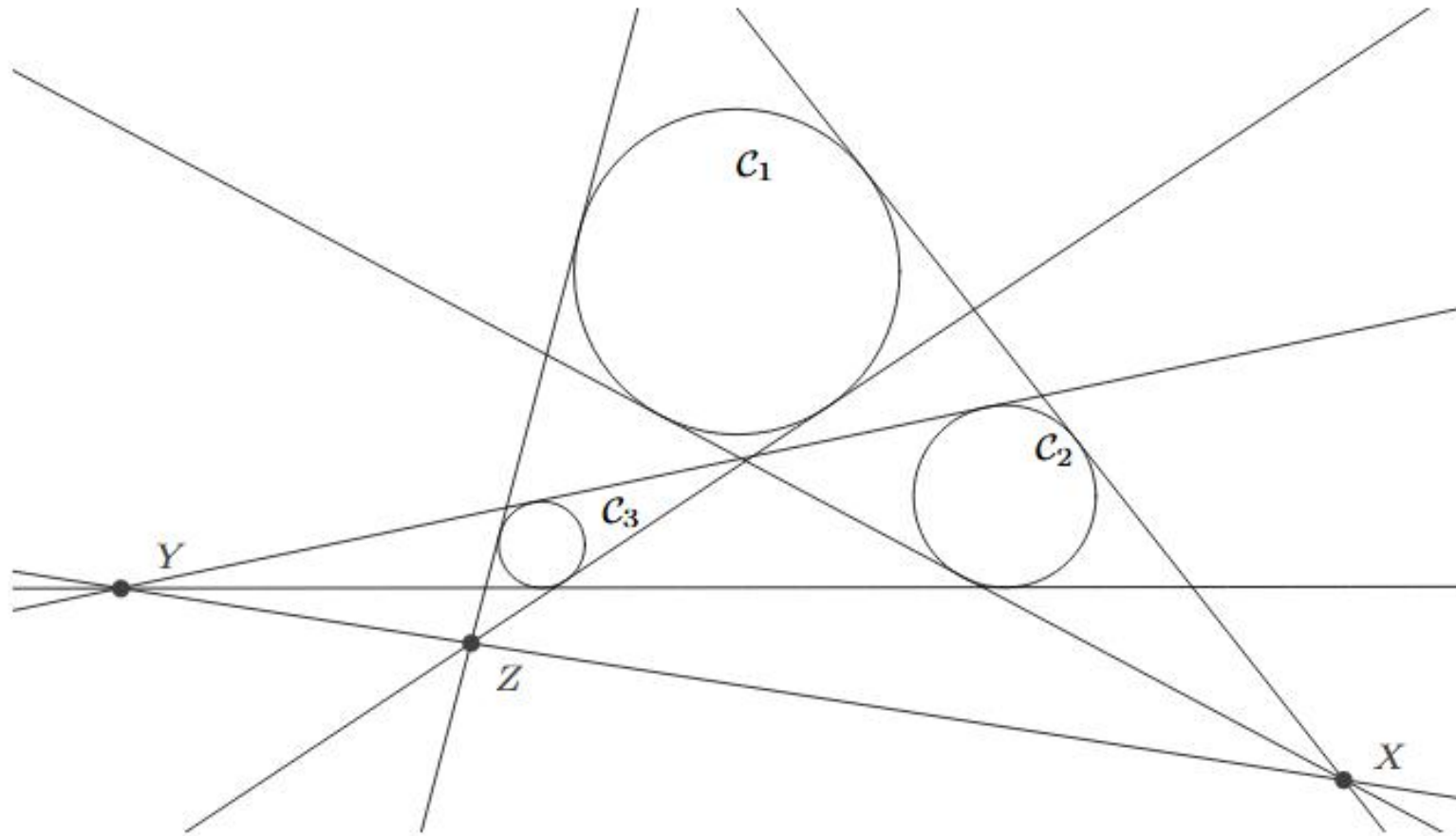


FIGURE 6 – Le théorème de Monge.